

Σ Шпаргалка формул

Главная формула каждой карточки.

1 Матрицы и определители

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Матрица — таблица чисел	$A = (a_{ij})$, размер $m \times n$	a_{ij} — конфетка в строке i и столбце j . Строк m , столбцов n .
Определитель	$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$	Пример: $ 2 \ 3; 5 \ 7 = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$.
Обратная матрица	$A^{-1} = (1 / \det A) \cdot AV$	AV — присоединённая: из алгебраических дополнений, транспонированная. $A \cdot A^{-1} = E$.
Ранг матрицы	$r(A)$ — ранг: максимальный порядок ненулевого минора	Проще: сколько строк остаётся после упрощения.

2 Системы уравнений

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Что такое система уравнений	$A \cdot X = B$	A — таблица коэффициентов, X — столбец неизвестных, B — столбец свободных членов.
Крамер и матричный способ	$x_i = \Delta_i / \Delta$	Δ — определитель системы. Δ_i — определитель с заменённым i -м столбцом. Нужно $\Delta \neq 0$.
Метод Гаусса и теорема Кронекера–Капелли	$r(A) = r(\bar{A})$	Ранг основной матрицы равен рангу расширенной — система совместна (Кронекер–Капелли).
Однородные системы и ФСР	$X = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k, k = n - r$	$e_1 \dots e_k$ — фундаментальная система решений (ФСР). $c_1 \dots c_k$ — любые числа. n — число неизвестных.

3 Векторные пространства

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Линейное пространство	$x + y = y + x; \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$	Первое: порядок сложения не важен. Второе: число «раскрывает скобки».
Линейная зависимость	$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$	Если хотя бы одно λ не ноль, набор зависимый. Если все λ нули, независимый.
Базис и координаты	$x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n$	Читается: «икс равно икс-один эф-один плюс...». Числа $x_1 \dots x_n$ — координаты x .
Переход к другому базису	$\xi = C \cdot \eta; \eta = C^{-1} \cdot \xi$	Старые координаты получаем умножением на C . Обратно — на обратную матрицу C^{-1} .
Аффинное пространство	$MN + NP = MP$	Пройти из M в N , потом из N в P — то же самое, что сразу из M в P .

4 Произведения векторов

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Скалярное произведение	$(x, y) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$	Перемножь числа с одинаковыми номерами и сложи всё. Получится число.
Векторное произведение	$ a \times b = a \cdot b \cdot \sin \varphi$	Длина новой стрелки равна площади параллелограмма на a и b . φ — угол между ними.
Смешанное произведение	$V = (a \times b) \cdot c $	Объём параллелепипеда. Знак «плюс» — правая тройка, «минус» — левая.
Ортонормированный базис	$b_2 = a_2 - ((a_2, b_1) / (b_1, b_1)) \cdot b_1$	Так b_2 становится перпендикулярен b_1 . Остальные векторы — по тому же правилу.

5 Линейные отображения

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Линейное отображение	$A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 A(v_1) + \lambda_2 A(v_2)$	Одна формула заменяет два правила: сложение и умножение на число. Ноль переходит в ноль.
Ядро и образ	$\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = \dim V$	Размер ядра плюс размер образа равен размеру исходного пространства.
Матрица отображения	$w = A \cdot v$	Координаты образа w получаем умножением матрицы A на координаты прообраза v .
Линейные операторы	$A_f = S^{-1} \cdot A_e \cdot S$	S — матрица перехода от базиса e к базису f . Такие матрицы называют подобными.

6 Пределы

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Логика, множества, кванторы	$\neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x)$	«Не у всех верно» значит: найдётся хотя бы один, у кого нет.
Метод математической индукции	$k \in A \Rightarrow k + 1 \in A$	Если верно для k , то верно и для $k + 1$.
Предел последовательности	$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N: x_n - a < \varepsilon$	Для любого малого ε найдётся номер N . Дальше все x_n ближе к a , чем на ε .
Предел функции	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) - A < \varepsilon$	Для любого малого ε найдётся δ . Если x близко к x_0 , то $f(x)$ близко к A .

7 Непрерывность функций одной переменной

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Непрерывность в точке	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$	Предел в точке равен значению в точке. Так пишут «без дырок».
Точки разрыва	x_0 — разрыв 1-го рода $\Leftrightarrow$ существуют оба односторонних предела	Если оба предела есть — первого рода. Иначе — второго рода.
Свойства непрерывных функций	$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in (a, b)$	Знаки на концах разные — внутри точно есть ноль.
Элементарные функции	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$	Синус подходит к нулю, когда x подходит к нулю. По этому доказывают непрерывность синуса.

8 Дифференцируемость функций одной переменной

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Что такое производная	$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x$	Предел отношения приращения функции к приращению аргумента.
Правила дифференцирования	$(u / v)' = (u' \cdot v - u \cdot v') / v^2$	Производная дроби. Знаменатель v не должен быть нулём.
Касательная и скорость	$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$	Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$.
Сложная, обратная, неявная функции	$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$	Производная сложной функции: производная снаружи умножить на производную внутри.

9 Теоремы о производных

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Высшие производные	$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0..n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$, где $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$	Формула Лейбница: производная n-го порядка от произведения. Читается как сумма слагаемых с числами C.
Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши	$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$, $\xi \in (a; b)$	Формула Лагранжа (конечных приращений). Читается: есть точка ξ между a и b, где наклон касательной равен наклону хорды.
Формула Тейлора	$f(x) = \sum_{k=0..n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + r_n(x)$	Функция = многочлен Тейлора + остаток r_n . При $x_0 = 0$ это формула Маклорена.
Правило Лопиталья	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	Правило Лопиталья: если предел f'/g' существует, то предел f/g такой же. Рядом с точкой $g' \neq 0$.

10 Применение производных

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Возрастание и экстремумы	$f'(x) \geq 0$ на $(a; b) \Leftrightarrow f$ возрастает на $(a; b)$	Читается: если производная не отрицательная, функция растёт. Для убывания нужен знак $f' \leq 0$.
Выпуклость и перегибы	$f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — минимум; $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — максимум	Признак экстремума через вторую производную. Сначала находим точку, где $f' = 0$.
Асимптоты	$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x)$, $y = k \cdot x + b$	Наклонная асимптота $y = kx + b$. Если $k = 0$, она горизонтальная: $b = \lim f(x)$.
Наибольшее и наименьшее значение	$\max[a; b] f = \max\{f(x_{\text{крит}}), f(a), f(b)\}$	Работает на замкнутом отрезке, где функция непрерывна. Берём все кандидаты и сравниваем.

11 Неопределённый интеграл

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Первообразная и интеграл	$\int f(x) dx = F(x) + C$	Интеграл от эф от икс дэ икс равен эф от икс плюс цэ. Цэ — любое число.
Таблица интегралов	$\int x^\alpha dx = x^{\alpha+1} / (\alpha + 1) + C, \alpha \neq -1$	Икс в степени альфа: степень поднимаем на один и делим на новую степень. Альфа не равна минус единице.
Замена переменной	$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$	Икс заменяем на фи от тэ, дэ икс — на фи штрих от тэ, умножить на дэ тэ. В конце возвращаемся к иксу.
Интегрирование по частям	$\int u dv = u \cdot v - \int v du$	Интеграл от и дэ вэ равен и умножить на вэ минус интеграл от вэ дэ у.

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Рациональные дроби	$P(x) / Q(x) = R(x) + P_1(x) / Q_1(x)$	Пэ от икс на ку от икс равно эр от икс плюс пэ один на ку один. Дробь пэ один на ку один — правильная.
Разложение на простые дроби	$A / (x - a)^{\alpha} + (Mx + N) / (x^2 + px + q)^{\beta}$	Это элементарные дроби. Буквы А, М, N — числа, которые надо найти.
Интегралы простых дробей	$\int A/(x - a) \, dx = A \cdot \ln x - a + C$	Интеграл от А на икс минус а дэ икс равен А умножить на логарифм модуля икс минус а, плюс цэ.
Интеграл рациональной дроби	$\int x \, dx / ((x^2-1)(x-2)) = -\frac{1}{2} \cdot \ln x-1 - \frac{1}{6} \cdot \ln x+1 + \frac{2}{3} \cdot \ln x-2 + C$	Интеграл от икс на икс квадрат минус один, умножить на икс минус два, равен сумме трёх логарифмов с коэффициентами. Плюс цэ.

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Корни и подстановка t	$t^m = (ax + b) / (cx + d)$	Тэ в степени эм равно дробь: а икс плюс бэ на це икс плюс дэ. Эм — общий знаменатель степеней корня.
Подстановки Эйлера	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x \cdot \sqrt{a} \pm t$	Корень из а икс квадрат плюс бэ икс плюс цэ равен плюс-минус икс корень из а, плюс-минус тэ. Знаки можно брать любые.
Тригонометрические: $u = \operatorname{tg}(x/2)$	$\sin x = 2u / (1 + u^2), \cos x = (1 - u^2) / (1 + u^2)$	Синус икс равен два у на один плюс у квадрат. Косинус икс равен один минус у квадрат на один плюс у квадрат. Здесь у — тангенс половины икса.
Синус, косинус и экспонента	$\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \, dx = e^{\alpha x} \cdot (\beta \cdot \sin \beta x + \alpha \cdot \cos \beta x) / (\alpha^2 + \beta^2) + C$	Интеграл от е в степени альфа икс, на косинус бэ икс, равен дроби: е в степени альфа икс, на скобку из бэ синус бэ икс плюс альфа косинус бэ икс, делённое на альфа квадрат плюс бэ квадрат. Плюс цэ.

14 Определённый интеграл

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Интегральная сумма и площадь	$\int_a^b f(x) dx = \lim(\lambda \rightarrow 0) \sum f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$	Читается: «интеграл от а до б». Это предел суммы полосок, когда они очень тонкие.
Свойства интеграла	$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_{cb} f dx$	Отрезок от а до б можно разрезать точкой с. Площади кусков складываются.
Формула Ньютона–Лейбница	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$	Формула Ньютона–Лейбница. Здесь $F'(x) = f(x)$: F — первообразная для f.
Несобственные интегралы	$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim(A \rightarrow +\infty) \int_a^A f(x) dx$	Считаем обычный интеграл до числа А. Потом смотрим, к чему он стремится, когда А растёт.
Бесконечный разрыв внутри отрезка	$\int_a^b f dx = \lim(\varepsilon_1 \rightarrow +0) \int_a^{c-\varepsilon_1} f dx + \lim(\varepsilon_2 \rightarrow +0) \int_{c+\varepsilon_2}^b f dx$	Два предела считаются отдельно. Если хотя бы одна часть расходится, расходится и весь интеграл.

15 Прямая на плоскости

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Линии на плоскости	$F(x, y) = 0$	F — формула линии. Точка лежит на линии, если её x и y подходят.
Уравнения прямой	$Ax + By + C = 0$	«А икс плюс бэ игрек плюс цэ равно нулю». Так записывается любая прямая.
Угол между прямыми	$k_1 \cdot k_2 = -1$	Наклоны перемножили — вышел минус единица. Значит, прямые пересеклись под прямым углом.
Расстояние до прямой	$d = Ax_0 + By_0 + C / \sqrt{A^2 + B^2}$	Подставь координаты точки. Возьми модуль. Раздели на длину вектора n.

16 Кривые второго порядка

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Окружность	$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$	Хотя бы один из коэффициентов А, В, С не равен нулю.
Эллипс	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	Икс в квадрате на а в квадрате, плюс игрек в квадрате на бэ в квадрате, равно единице.
Гипербола	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$	Минус между слагаемыми: ветки уходят влево и вправо, по оси ОХ.
Парабола	$y^2 = 2px$	Игрек в квадрате равно два пэ икс. Фокус $(p/2; 0)$, директриса $x = -p/2$.

17

Трёхмерная геометрия

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Плоскость	$Ax + By + Cz + D = 0$	Читается: «А икс плюс бэ игрек плюс цэ зет плюс дэ равно нулю». Буквы А, В, С — координаты нормали n.
Расстояние и углы	$d = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$	«Дэ» равно модулю выражения, делённому на корень из суммы квадратов А, В, С. Это короткий путь от точки до плоскости.
Прямая в пространстве	$(x - x_0)/m = (y - y_0)/n = (z - z_0)/p = t$	Читается: «икс минус икс нулевое, делить на эм» — и так же для игрека и зета. Вектор S {m; n; p} задаёт направление.
Прямая и плоскость	$\sin \varphi = Am + Bn + Cp / (\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2})$	φ — угол между прямой S {m; n; p} и плоскостью с нормалью {А; В; С}.
Расстояние между прямыми	$d = (M_1M_2, S_1, S_2) / S_1 \times S_2 $	Скрещивающиеся прямые: объём параллелепипеда (смешанное произведение) делим на площадь основания (длина векторного произведения).

18 Поверхности 2-го порядка

ТЕМА	ФОРМУЛА	КАК ЧИТАТЬ
Эллипсоид и сфера	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$	Читается: «икс квадрат на а квадрат, плюс игрек квадрат на бэ квадрат, плюс зет квадрат на цэ квадрат, равно единице». Буквы а, b, с — полуоси.
Гиперболоиды	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$	Читается: «икс квадрат на а квадрат, плюс игрек квадрат на бэ квадрат, минус зет квадрат на цэ квадрат, равно единице». Это однополостный гиперболоид.
Параболоиды и конус	$z = x^2/a^2 + y^2/b^2$	Эллиптический параболоид — чаша, открытая вверх. Читается: «зет равно икс квадрат на а квадрат, плюс игрек квадрат на бэ квадрат».
Цилиндры и вращение	$z \rightarrow \pm\sqrt{(x^2 + z^2)}$	Вращаем кривую вокруг оси Oy: вместо z ставим $\pm\sqrt{(x^2 + z^2)}$. Знак выбирай тот же, что у z на исходной кривой.

А

аддитивность — интеграл по всему отрезку равен сумме кусков (л. 14)

алгебраическое дополнение — минор со знаком «плюс» или «минус» (л. 1)

асимптота — прямая, к которой график подходит очень близко (л. 10, 16)

аффинное пространство — точки плюс векторы между ними с правилом треугольника (л. 3)

аксиомы — 8 правил, которые должны выполняться (л. 3)

арифметическое пространство R^n — наборы из n чисел, например $(1; 2; -2)$ (л. 3)

аффинная система координат — начало O и базис векторов (л. 3)

Б

база индукции — проверка первого случая (л. 6)

базисные неизвестные — неизвестные, которые выражаем через остальные (л. 2)

бесконечно малая — величина, которая стремится к нулю (л. 6)

базис — набор независимых векторов, из которых всё собирается (л. 3)

базисный минор — ненулевой минор порядка, равного рангу (л. 1)

бесконечный разрыв — точка, где функция уходит в бесконечность (л. 14)

В

вектор — любой элемент линейного пространства, не обязательно стрелка (л. 3)

вершина — самая «острая» точка параболы; у $y^2 = 2px$ это $O(0; 0)$ (л. 16)

высказывание — утверждение, которое верно или неверно (л. 6)

векторное произведение — вектор $c = a \times b$, перпендикулярный a и b (л. 4)

выпуклость вниз — график лежит не ниже своей касательной (л. 10)

Г

гиперболоид — поверхность, в сечениях которой получаются гиперболы (л. 18)

главное значение — предел при симметричном подходе к этой точке с двух сторон (л. 14)

главная диагональ — клетки от левого верхнего угла к правому нижнему (л. 1)

горловой эллипс — самое узкое сечение однополостного гиперболоида (л. 18)

Д

дефект и ранг — дефект — размер ядра; ранг — размер образа, он равен рангу матрицы (л. 5)

дифференциал — маленькое изменение функции, записанное через dx (л. 9)

длина вектора n — $\sqrt{A^2 + B^2}$ — корень из суммы квадратов A и B (л. 15)

директриса — прямая, до которой у точки параболы такое же расстояние, как до фокуса (л. 16)

дифференцирование — поиск производной (л. 8)

Е

евклидово пространство — пространство, где есть скалярное произведение и длины (л. 4)

единичная матрица E — единицы на диагонали, остальное нули (л. 1)

З

замена переменной — новая буква вместо сложного кусочка (л. 11)

И

изоморфизм — соответствие, которое сохраняет сложение и умножение на число (л. 3)

интегральная сумма — сумма площадей полосок до предела (л. 14)

импликация $\Rightarrow$ — «если A , то B » (л. 6)

интегрирование по частям — способ: разбить интеграл на части u и dv (л. 11)

иррациональная функция — функция, где x стоит под корнем (л. 13)

К

каноническое уравнение — $(x - x_0)/m = (y - y_0)/n$, где $S\{m; n\}$ — направляющий вектор (л. 15)

квадратный трёхчлен — выражение вида $ax^2 + bx + c$ (л. 13)

компланарные векторы — векторы, которые лежат в одной плоскости (л. 4)

координатный столбец — столбик координат вектора в выбранном базисе (л. 5)

коэффициенты — числа перед неизвестными (л. 2)

касательная — прямая, которая касается графика в одной точке (л. 8, 9)

квантор — знак «для всех» $\forall$ или «существует» $\exists$ (л. 6)

конус второго порядка — две воронки, соединённые вершинами (л. 18)

координаты — числа, сколько базисных векторов взять (л. 3)

критическая точка — точка, где $f' = 0$ или производной нет (л. 10)

Л

линейная зависимость — одна строка выражается через остальные (л. 1)

линейно независимые — ни один вектор не собирается из остальных (л. 3)

локальный экстремум — максимум или минимум в маленькой окрестности точки (л. 10)

линейная комбинация — сумма векторов, каждый умножен на своё число (л. 3)

линейный оператор — линейное отображение пространства в самого себя (л. 5)

М

матрица — таблица из чисел по строкам и столбцам (л. 1)

матрица линейного отображения — таблица из координат образов базисных векторов (л. 5)

матрица перехода С — таблица, которая пересчитывает координаты из одного базиса в другой (л. 3)

минор — меньший определитель, если вычеркнуть строку и столбец (л. 1)

многочлен Тейлора — первые слагаемые формулы Тейлора (л. 9)

монотонная — всё время растёт или всё время убывает (л. 6)

метод половинного деления — делишь отрезок пополам и оставляешь половину со сменой знака (л. 7)

многочлен — сумма степеней x с числами, например $x^2 - 1$ (л. 12)

модуль — число без минуса: $|-15| = 15$ (л. 15, 17)

Н

наибольшее значение — самое большое значение функции на отрезке (л. 10)

направляющая — кривая, по которой ведём прямую цилиндра (л. 18)

невырожденная — определитель не равен нулю (л. 1)

неопределённость — предел, где сразу не видно ответ: $0/0$ или ∞/∞ (л. 9)

неопределённый интеграл — все первообразные сразу: $F + C$ (л. 11)

несобственный интеграл — интеграл с бесконечным краем или с бесконечной функцией (л. 14)

нормальный вектор — стрелка, перпендикулярная прямой; её координаты — A и B (л. 15)

наклонная асимптота — прямая $y = kx + b$ (л. 10)

направляющий вектор — стрелка, параллельная прямой (л. 17)

невырожденная система — Δ не равен нулю (л. 2)

неопределённые коэффициенты — неизвестные числа, которые находим при разложении (л. 12)

непрерывность — график без скачков и дырок (л. 7)

нормаль — прямая через точку касания, перпендикулярная касательной (л. 8, 17)



образ и прообраз — образ — результат; прообраз — то, из чего он получился (л. 5)

общий знаменатель — число, которое делится на все знаменатели степеней (л. 13)

ограниченная — все члены не уходят дальше какого-то числа M (л. 6)

односторонний предел — предел, когда подходим только слева или только справа (л. 6)

определитель — число, которое считаем из квадратной таблицы (л. 1)

ортогонализация — процесс, который делает базис перпендикулярным (л. 4)

ортогональный базис — базис из попарно перпендикулярных векторов (л. 4)

отображение — правило: каждому элементу V ставится в соответствие один элемент W (л. 5)

обратная матрица — матрица, которая при умножении даёт единичную E (л. 1)

общий перпендикуляр — самый короткий отрезок между скрещивающимися прямыми (л. 17)

однородная система — все свободные члены равны нулю (л. 2)

определённый интеграл — предел суммы площадей тонких полосок (л. 14)

определитель системы Δ — определитель таблицы коэффициентов (л. 2)

ортогональные векторы — перпендикулярные векторы: их скалярное произведение равно нулю (л. 4)

ортонормированный базис — базис из перпендикулярных векторов длины 1 (л. 3, 4)

отрезок $[a, b]$ — все числа от a до b , включая концы (л. 7)

п

параболоид — поверхность в форме чаши или седла (л. 18)

параллельные прямые — прямые, которые не пересекаются (л. 15)

параметрическое задание — x и y заданы через третью переменную t (л. 8)

пересечение $\cap$ — то, что есть и в первом, и во втором множестве (л. 6)

параллелепипед — коробка, у которой все грани — параллелограммы (л. 4)

параметр t — число, которое «шагает» по прямой (л. 17)

первообразная — функция, у которой производная равна f (л. 11, 14)

перпендикуляр — самая короткая линия из точки до плоскости (л. 17)

перпендикулярные прямые — прямые, которые пересекаются под углом 90° (л. 15)

поверхность вращения — кривая, которая крутится вокруг оси (л. 18)

подобные матрицы — матрицы одного и того же преобразования в разных базисах (л. 5)

подстановка Эйлера — замена, которая убирает корень из квадратного трёхчлена (л. 13)

полуоси а и b — а — большая половина оси, b — малая (л. 16)

постоянная С — любое число, его добавляем в конце (л. 11)

правило дифференцирования — готовый способ найти производную суммы, произведения или дроби (л. 8)

правильная дробь — степень верха меньше степени низа (л. 12)

предел последовательности — число, к которому подходят члены при большом n (л. 6)

приращение — на сколько изменилось: новое значение минус старое (л. 8)

поверхность — все точки, которые подходят под одно уравнение (л. 17)

повторное интегрирование по частям — формула по частям применяется два раза подряд (л. 13)

подпоследовательность — часть последовательности с растущими номерами (л. 6)

полуоси — половины длин осей: а, b, с (л. 18)

порядок линии — наибольшая сумма степеней x и y в уравнении (л. 15)

правая тройка — а, b, с как указательный, средний и большой пальцы правой руки (л. 4)

правило Лопитала — предел отношения = предел отношения производных (л. 9)

предел — число, к которому подходят значения функции (л. 7)

пределы интегрирования — числа а и b внизу и вверху знака $\int$ (л. 14)

производная n-го порядка — производная от производной, взятая n раз (л. 9)

Р

радиус R — расстояние от центра до любой точки окружности (л. 16)

размерность — число векторов в базисе (л.

радиус-вектор — вектор OM из начала координат O в точку M (л. 3)

ранг — максимальный порядок ненулевого

3)

ранг дробления λ — самая широкая полоска; её делаем всё меньше (л. 14)

рациональная функция — дробь из двух многочленов (л. 12)

минора (л. 1, 2)

расходится — предела нет или он равен бесконечности (л. 14)

С

свободные члены — числа справа от знака равно (л. 2)

скрещивающиеся прямые — прямые, которые не лежат в одной плоскости (л. 17)

смешанное произведение — число $(a \times b) \cdot c$: сначала векторное, потом скалярное (л. 4)

сопряжённая гипербола — $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$: ветки смотрят вверх и вниз (л. 16)

ступенчатый вид — уравнения идут лесенкой, каждое короче предыдущего (л. 2)

скалярное произведение — число, которое получается из двух векторов (л. 4)

сложная функция — одна функция подставлена внутрь другой (л. 7, 8)

совместная система — у неё есть хотя бы одно решение (л. 2)

стационарная точка — точка, где $f' = 0$ (л. 10)

сходится — предел существует и равен обычному числу (л. 14)

Т

таблица производных — готовые ответы для основных функций (л. 8)

тангенс (tg) — отношение синуса к косинусу (л. 13)

теорема Ролля — если $f(a) = f(b)$, то есть точка с $f' = 0$ (л. 9)

точка разрыва — место, где функция не непрерывна (л. 7)

тривиальное решение — все неизвестные равны нулю (л. 2)

табличный интеграл — готовая формула, её надо знать наизусть (л. 11)

теорема о среднем — для непрерывной f найдётся c : $f = f(c)(b - a)$ (л. 14)

точка перегиба — точка, где изгиб графика меняется на противоположный (л. 10)

транспонирование — строки становятся столбцами (л. 1)

У

угловой коэффициент k — тангенс угла наклона прямой к оси OX (л. 15)

угол между прямой и плоскостью — угол между прямой и её тенью на плоскости (л. 17)

уравнение линии — формула, которой подходят все точки линии и только они (л. 15)

устранимый разрыв — пределы слева и справа совпадают (л. 7)

Ф

факториал $k!$ — $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k$, например $3! = 6$ (л. 9)

фокусы — две заданные точки, от которых считают расстояния (л. 16)

формула Лейбница — правило для производной n -го порядка от произведения (л. 9)

формула Маклорена — формула Тейлора при $x_0 = 0$ (л. 9)

формулы Крамера — ответы через определители (л. 2)

фундаментальная система решений — набор решений, через который выражается всё (л. 2)

Х

хорда — прямая между двумя точками графика (л. 9)

Ц

целая часть — полные части, которые получаются при делении верха на низ (л. 12)

центр окружности — точка, от которой все точки окружности одинаково далеко (л. 16)

Ч

частное пределов — делить пределы можно, если делитель не равен нулю (л. 6)

Ш

шаг индукции — переход от k к $k + 1$ (л. 6)

Э

экстремум — точка максимума или минимума функции (л. 10)

элементарная функция — построена из основных функций сложением, умножением и вложением (л. 7)

элементарная дробь — простая дробь вида $A/(x-a)^n$ или $(Mx+N)/(x^2+px+q)^n$ (л. 12)

эллипсоид — мяч, немного вытянутый или сплюснутый (л. 18)

Я

ядро $\text{Ker } A$ — все векторы, которые превращаются в ноль (л. 5)

Знаки и формулы

$\arctg$ — угол, у которого тангенс равен данному числу (л. 12)

$e^{(ax)}$ — показательная функция: e в степени $a \cdot x$ (л. 13)

δ (дельта) — маленький радиус вокруг x_0 , который мы выбираем (л. 6)

dx через du — $dx = 2du / (1 + u^2)$ при $u = \tg(x/2)$ (л. 13)

$\ln$ — натуральный логарифм, есть кнопка на калькуляторе (л. 12)

🎯 Проверь себя

Сначала ответь сам, потом смотри ответ.

1 Матрицы и определители

🎯 Как называется таблица из чисел по строкам и столбцам? · Матрица — таблица чисел

✅ Матрица.

🎯 Что надо вычесть при подсчёте определителя 2×2 ? · Определитель

✅ Произведение побочной диагонали.

🎯 Когда у матрицы есть обратная? · Обратная матрица

✅ Когда определитель не равен нулю.

🎯 Какой ранг у матрицы, где все элементы нули? · Ранг матрицы

✅ Ноль.

2 Системы уравнений

🎯 Как называется система, у которой одно решение? · Что такое система уравнений

✅ Определённая.

🎯 Когда работают формулы Крамера? · Крамер и матричный способ

✅ Когда определитель системы не равен нулю.

🎯 Какая строка означает, что решений нет? · Метод Гаусса и теорема Кронекера–Капелли

✅ Вида $0 = b$, где b не равно нулю.

🎯 Какое решение всегда есть у однородной системы? · Однородные системы и ФСР

✅ Нулевое: все неизвестные равны нулю.

3 Векторные пространства

🎯 Что нужно, чтобы набор был линейным пространством? · Линейное пространство

✓ Сложение, умножение на число и 8 правил.

🎯 Когда набор векторов зависимый? · Линейная зависимость

✓ Когда сумма с числами даёт ноль, а числа не все нули.

🎯 Что такое координаты вектора? · Базис и координаты

✓ Числа, на которые умножаем базисные векторы, чтобы получить вектор.

🎯 Как найти старые координаты по новым? · Переход к другому базису

✓ Умножить новые координаты на матрицу C .

🎯 Как найти координаты вектора MN , если известны координаты точек M и N ? · Аффинное пространство

✓ Из координат конца N вычесть координаты начала M .

4 Произведения векторов

🎯 Что получится, если перемножить два вектора скалярно? · Скалярное произведение

✓ Обычное число.

🎯 Что будет, если поменять a и b местами? · Векторное произведение

✓ Вектор сменит направление: $a \times b = -(b \times a)$.

🎯 Что означает ноль в смешанном произведении? · Смешанное произведение

✓ Векторы лежат в одной плоскости.

🎯 Какие векторы образуют ортонормированный базис? · Ортонормированный базис

✓ Перпендикулярные друг другу, каждый длиной 1.

5 Линеинные отображения

🎯 Какие два условия делают отображение линейным? · Линейное отображение

✓ Сумма переходит в сумму образов, число выносится за знак.

🎯 Когда линейное отображение инъективно? · Ядро и образ

✓ Когда ядро состоит только из нулевого вектора.

🎯 Что записываем в первый столбец матрицы? · Матрица отображения

✓ Координаты образа первого базисного вектора.

🎯 Что делает гомотетия с $\lambda = 2$? · Линейные операторы

✓ Растягивает каждый вектор в 2 раза.

6 Пределы

🎯 Что значит значок $\forall$? · Логика, множества, кванторы

✓ «Для всех».

🎯 Какие три шага у метода индукции? · Метод математической индукции

✓ База, шаг индукции и вывод.

🎯 Последовательность растёт и не выше какого-то числа. Что с ней? · Предел последовательности

✓ Она сходится.

🎯 Когда у функции есть предел в точке x_0 ? · Предел функции

✓ Когда левый и правый пределы существуют и равны.

7 Непрерывность функций одной переменной

🎯 Что значит «функция непрерывна в точке»? · Непрерывность в точке

✓ Её предел в точке равен её значению там.

🎯 Какой разрыв у $1/x$ в точке 0? · Точки разрыва

✓ Второго рода: один из пределов не существует.

🎯 Что говорит теорема о нуле? · Свойства непрерывных функций

✓ Если на концах знаки разные, внутри есть ноль.

🎯 Непрерывен ли синус? · Элементарные функции

✓ Да, везде, где он определён.

8 Дифференцируемость функций одной переменной

🎯 Чему равна производная постоянной C ? · Что такое производная

✓ Нулю: $C' = 0$.

🎯 Чему равна производная $\sin x$? · Правила дифференцирования

✓ $\cos x$.

🎯 Что равно наклону касательной? · Касательная и скорость

✓ Производная $f'(x_0)$, то есть $\operatorname{tg} \alpha$.

🎯 С чего начинают искать производную сложной функции? · Сложная, обратная, неявная функции

✓ С выделения внутренней функции $u(x)$.

9 Теоремы о производных

🎯 Что такое $f^{(2)}$? · Высшие производные

✓ Производная от производной f' .

🎯 Что говорит теорема Лагранжа о касательной? · Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши

✓ Есть точка, где она параллельна хорде.

🎯 Что такое формула Маклорена? · Формула Тейлора

✓ Формула Тейлора при $x_0 = 0$.

🎯 Когда можно применить правило Лопиталя? · Правило Лопиталя

✓ Когда получается $0/0$ или ∞/∞ .

10 Применение производных

🎯 Как называется точка, где $f' = 0$? · Возрастание и экстремумы

✓ Стационарная точка.

🎯 Какой знак у второй производной у «улыбки»? · Выпуклость и перегибы

✓ Плюс: $f'' > 0$.

🎯 Какая асимптота получается при $k = 0$? · Асимптоты

✓ Горизонтальная.

🎯 Где ищем наибольшее значение функции на отрезке? · Наибольшее и наименьшее значение

✓ В критических точках и на концах отрезка.

11 Неопределённый интеграл

🎯 Зачем в ответе пишут $+ C$? · Первообразная и интеграл

✅ Потому что стартовое число может быть любым.

🎯 Чему равен $\int \cos x \, dx$? · Таблица интегралов

✅ $\sin x + C$.

🎯 Что делаем в самом конце замены? · Замена переменной

✅ Возвращаемся к исходной букве x .

🎯 Что получится по формуле $\int u \, dv$? · Интегрирование по частям

✅ $u \cdot v - \int v \, du$.

12 Интегрирование рациональных функций

🎯 Когда дробь называется правильной? · Рациональные дроби

✅ Когда степень верха меньше степени низа.

🎯 Как называются простые дроби, на которые раскладываем? · Разложение на простые дроби

✅ Элементарные рациональные дроби.

🎯 Чему равен $\int dx/(x-a)$? · Интегралы простых дробей

✅ $\ln|x-a| + C$.

🎯 Что обычно получается в ответе? · Интеграл рациональной дроби

✅ Рациональные дроби, $\arctg$ и $\ln$.

13 Интегрирование иррациональных функций

🎯 Какую замену берём для $\int dx/(\sqrt{x+3}\sqrt{x})$? · Корни и подстановка t

✅ $x = t^6$.

🎯 Что берём, если у трёхчлена есть корни x_1 и x_2 ? · Подстановки Эйлера

✅ $t^2 = a(x-x_2)/(x-x_1)$.

🎯 Чему равен $\sin x$ через $u = \tg(x/2)$? · Тригонометрические: $u = \tg(x/2)$

✅ $2u / (1 + u^2)$.

🎯 Как разложить $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x$ в сумму? · Синус, косинус и экспонента

✅ $\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x]$.

14 Определённый интеграл

🎯 Что делаем с полосками, чтобы получить точную площадь? · Интегральная сумма и площадь

✅ Делаем их всё тоньше.

🎯 Что будет, если отрезок разрезать точкой c ? · Свойства интеграла

✅ Интеграл станет суммой двух кусков.

🎯 Как посчитать интеграл от a до b , если есть F ? · Формула Ньютона–Лейбница

✅ Вычесть $F(a)$ из $F(b)$.

🎯 Когда несобственный интеграл сходится? · Несобственные интегралы

✅ Когда предел существует и конечен.

🎯 Можно ли при проверке сходимости брать $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$? · Бесконечный разрыв внутри отрезка

✅ Нет, они независимы. Одинаковые ε дают только главное значение.

15 Прямая на плоскости

🎯 Что значит «точка лежит на линии»? · Линии на плоскости

✅ Её координаты подходят под уравнение линии.

🎯 Какой степени уравнение прямой? · Уравнения прямой

✅ Первой: $Ax + By + C = 0$.

🎯 Когда две прямые перпендикулярны? · Угол между прямыми

✅ Когда $k_1 \cdot k_2 = -1$.

🎯 Как найти расстояние от точки до прямой? · Расстояние до прямой

✅ Подставить точку в $Ax + By + C$, взять модуль, поделить на $\sqrt{A^2 + B^2}$.

16 Кривые второго порядка

🎯 Какая формула у окружности с центром $(x_0; y_0)$? · Окружность

✓ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

🎯 Что постоянно у эллипса? · Эллипс

✓ Сумма расстояний до двух фокусов, она равна $2a$.

🎯 Что постоянно у гиперболы? · Гипербола

✓ Модуль разности расстояний до двух фокусов, он равен $2a$.

🎯 Чему равен эксцентриситет параболы? · Парабола

✓ Единице: $\varepsilon = 1$.

17 Трёхмерная геометрия

🎯 Как называется стрелка, перпендикулярная плоскости? · Плоскость

✓ Нормаль, или нормальный вектор.

🎯 Когда две плоскости перпендикулярны? · Расстояние и углы

✓ Когда $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

🎯 Что задаёт направление прямой? · Прямая в пространстве

✓ Направляющий вектор $S \{m; n; p\}$.

🎯 Когда прямая параллельна плоскости? · Прямая и плоскость

✓ Когда $Am + Bn + Cp = 0$.

🎯 Чему равно расстояние между пересекающимися прямыми? · Расстояние между прямыми

✓ Нулю.

🎯 Каким будет эллипсоид, если $a = b = c$? · Эллипсоид и сфера

✓ Сферой, то есть мячом.

🎯 Какая правая часть у двуполостного гиперboloида? · Гиперboloиды

✓ -1 , а у однополостного 1 .

🎯 Что получится в сечении $z = 0$ у гиперболического параболоида? · Параболоиды и конус

✓ Две пересекающиеся прямые: $y = \pm(b/a) \cdot x$.

🎯 Как называется кривая, по которой движется прямая цилиндра? · Цилиндры и вращение

✓ Направляющая.