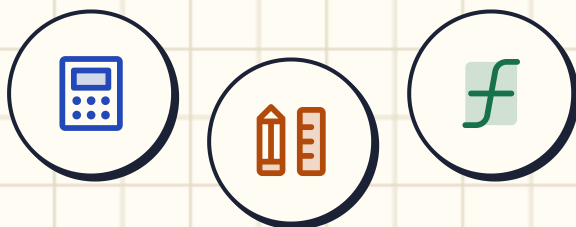


Прикладная математика

Пособие для первоклассника и не только: 18 лекций
простыми словами.

75 карточки · 75 формул · 167 терминов



Курс «Прикладная математика», 1 семестр. Сделано по лекциям курса; для строгих определений и доказательств смотри оригиналы.

Как устроено пособие

Каждая лекция разобрана на 3–4 карточки. Читай подряд или выбирай по оглавлению.

История

Главная мысль одной-двумя фразами.

Доска

Главная формула и как её прочитать.

Как в жизни

Жёлтая бумажка с примером.

Проверь себя

Вопрос и ответ под ним.

Схема

Цепочка, набор, сравнение или шаги.

Запомни

Что обязательно знать.

Слова для взрослых

Термины, которые спрашивают.

Приложения

Шпаргалка, словарь и вопросы — во втором файле.



Часть I. Линейная алгебра

Матрицы, системы, векторы, отображения

1

Матрицы и определители

Матрица — таблица чисел · Определитель · Обратная матрица · Ранг матрицы

2

Системы уравнений

Что такое система уравнений · Крамер и матричный способ · Метод Гаусса и теорема Кронекера–Капелли · Однородные системы и ФСР

3

Векторные пространства

Линейное пространство · Линейная зависимость · Базис и координаты · Переход к другому базису · Аффинное пространство

4

Произведения векторов

Скалярное произведение · Векторное произведение · Смешанное произведение · Ортонормированный базис

5

Линейные отображения

Линейное отображение · Ядро и образ · Матрица отображения · Линейные операторы



Часть II. Математический анализ

Пределы, непрерывность, производные, интегралы

6

Пределы

Логика, множества, кванторы · Метод математической индукции · Предел последовательности · Предел функции

7

Непрерывность функций одной переменной

Непрерывность в точке · Точки разрыва · Свойства непрерывных функций · Элементарные функции

8

Дифференцируемость функций одной переменной

Что такое производная · Правила дифференцирования · Касательная и скорость · Сложная, обратная, неявная функции

9

Теоремы о производных

Высшие производные · Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши · Формула Тейлора · Правило Лопиталья

Применение производных

10 Возрастание и экстремумы · Выпуклость и перегибы · Асимптоты · Наибольшее и наименьшее значение

11 **Неопределённый интеграл**
Первообразная и интеграл · Таблица интегралов · Замена переменной · Интегрирование по частям

12 **Интегрирование рациональных функций**
Рациональные дроби · Разложение на простые дроби · Интегралы простых дробей · Интеграл рациональной дроби

13 **Интегрирование иррациональных функций**
Корни и подстановка t · Подстановки Эйлера · Тригонометрические: $u = \operatorname{tg}(x/2)$ · Синус, косинус и экспонента

14 **Определённый интеграл**
Интегральная сумма и площадь · Свойства интеграла · Формула Ньютона–Лейбница · Несобственные интегралы · Бесконечный разрыв внутри отрезка



Часть III. Аналитическая геометрия

Прямая, кривые, плоскость, поверхности

15 **Прямая на плоскости**
Линии на плоскости · Уравнения прямой · Угол между прямыми · Расстояние до прямой

16 **Кривые второго порядка**
Окружность · Эллипс · Гипербола · Парабола

17 **Трёхмерная геометрия**
Плоскость · Расстояние и углы · Прямая в пространстве · Прямая и плоскость · Расстояние между прямыми

18 **Поверхности 2-го порядка**
Эллипсоид и сфера · Гиперболоиды · Параболоиды и конус · Цилиндры и вращение



1 Матрица — таблица чисел

Матрица — это таблица из чисел: ряды и колонки. Как коробка конфет, где каждая на своём месте.



Элемент



Строка



Столбец



Диагональ

таблица конфет

$$A = (a_{ij}), \text{ размер } m \times n$$

a_{ij} — конфетка в строке i и столбце j . Строк m , столбцов n .

ЗАПОМНИ

- ✓ Квадратная: строк столько же, сколько столбцов.
- ✓ Единичная E : единицы на диагонали, остальное нули.
- ✓ Умножать можно, если столбцов первой равно строкам второй.
- ✓ Порядок важен: AB и BA обычно разные.



КАК В ЖИЗНИ

Как в морском бою: номер ряда и номер клетки вместе показывают место.

СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

матрица — таблица из чисел по строкам и столбцам

главная диагональ — клетки от левого верхнего угла к правому нижнему

транспонирование — строки становятся столбцами

🎯 Как называется таблица из чисел по строкам и столбцам?

✅ Матрица.

2 Определитель

Определитель — одно число, которое считаем из квадратной таблицы. Один итог за всю таблицу.

- 1 Перемножь числа по главной диагонали ↘
- 2 Перемножь числа по побочной диагонали ↙
- 3 Из первого произведения вычти второе

для таблицы 2×2

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Пример: $|2 \ 3; 5 \ 7| = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Таблица 3×3 считается по правилу треугольников (Саррюса).
- ✓ Треугольная матрица: произведение чисел на главной диагонали.
- ✓ Ряд из одних нулей — определитель равен нулю.
- ✓ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.



КАК В ЖИЗНИ

Как два друга считают разницу в конфетах: твоё минус его.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

определитель число, которое считаем из квадратной таблицы

минор меньший определитель, если вычеркнуть строку и столбец

алгебраическое дополнение минор со знаком «плюс» или «минус»

🎯 Что надо вычесть при подсчёте определителя 2×2 ?

- ✓ Произведение побочной диагонали.

3 Обратная матрица

Обратная матрица — как шаг назад после шага вперёд. Она возвращает всё на место.



Матрица A



$\det A \neq 0?$



Считаем AV



Получаем A^{-1}

если определитель не ноль

$$A^{-1} = (1 / \det A) \cdot AV$$

AV — присоединённая: из алгебраических дополнений, транспонированная. $A \cdot A^{-1} = E$.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Если $\det A = 0$, обратной матрицы нет.
- ✓ Второй способ: приписать E справа и преобразовать строки.
- ✓ $AX = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$. $XA = B \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$.
- ✓ $\det(A^{-1}) = 1 / \det A$.



КАК В ЖИЗНИ

Как обратный ход в лабиринте: идёшь назад по своим следам.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

обратная матрица матрица, которая при умножении даёт единичную E

единичная матрица E единицы на диагонали, остальное нули

невыврожденная определитель не равен нулю

🎯 Когда у матрицы есть обратная?

- ✓ Когда определитель не равен нулю.

4 Ранг матрицы

Ранг — сколько «главных» строк в таблице. Остальные строки получаются из них.

1 Меняй строки местами или умножай на число

2 Прибавляй к строке другую строку

3 Считай ненулевые строки — это ранг

элементарные преобразования

$r(A)$ — ранг: максимальный порядок ненулевого минора

Проще: сколько строк остаётся после упрощения.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Окаймляющие миноры: добавляй строку и столбец к ненулевому минору.
- ✓ Строки независимы, если ни одна не выражается через другие.
- ✓ Ранг не меняется при транспонировании и преобразованиях.
- ✓ Матрица из одних нулей: ранг равен нулю.



КАК В ЖИЗНИ

Как список гостей: повторы не считаются, считаются только разные.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

ранг — максимальный порядок ненулевого минора

базисный минор — ненулевой минор порядка, равного рангу

линейная зависимость — одна строка выражается через остальные

🎯 Какой ранг у матрицы, где все элементы нули?

👉 Ноль.

📎 Оригинал в курсе: MatrixDeterminant.pdf

📎 Практики по теме: №1 — Матрицы; №2 — Определители



1 Что такое система уравнений

Система уравнений — это несколько загадок про одни и те же числа. Ответ должен подходить ко всем сразу.

Совместна

- Хотя бы один ключ подходит
- Один ключ — определённая
- Много ключей — неопределённая

Несовместна

- Ни один ключ не подходит
- Решений нет

ключ-подбор

$$A \cdot X = B$$

A — таблица коэффициентов, X — столбец неизвестных, B — столбец свободных членов.

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Решение — набор чисел, при котором все уравнения верны.
- ✓ Единственное решение — определённая система.
- ✓ Решений много — неопределённая система.
- ✓ Расширенная матрица — A с приписанным столбцом B .



КАК В ЖИЗНИ

Как весы: обе чашки должны быть в равновесии.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

коэффициенты — числа перед неизвестными

свободные члены — числа справа от знака равно

совместная система — у неё есть хотя бы одно решение

🎯 Как называется система, у которой одно решение?

✓ Определённая.

2 Крамер и матричный способ

Если определитель системы не ноль, ответы находятся сразу. Два способа: матричный и Крамера.

- 1 Найди определитель Δ матрицы A
- 2 Замени i -й столбец на столбец B — получится Δ_i
- 3 Раздели Δ_i на Δ — это значение x_i

правило Крамера, если $\Delta \neq 0$

$$x_i = \Delta_i / \Delta$$

Δ — определитель системы. Δ_i — определитель с заменённым i -м столбцом. Нужно $\Delta \neq 0$.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Матричный способ: $X = A^{-1} \cdot B$.
- ✓ Если $\Delta = 0$, формулы Крамера не подходят — нужен Гаусс.
- ✓ Невырожденная система имеет ровно одно решение.



КАК В ЖИЗНИ

Как конструктор: меняешь одну деталь, остальные оставляешь на месте.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

определитель системы Δ определитель таблицы коэффициентов

невыврожденная система Δ не равен нулю

формулы Крамера ответы через определители

🎯 Когда работают формулы Крамера?

- ✓ Когда определитель системы не равен нулю.

3 Метод Гаусса и теорема Кронекера–Капелли

Метод Гаусса убирает неизвестные по одному. Сначала строим ступеньки, потом спускаемся и находим ответы.

- 1 Прямой ход: получаем ступенчатый вид
- 2 Пустые строки $0 = 0$ — отбрасываем
- 3 Обратный ход: находим неизвестные с конца

метод Гаусса

$$r(A) = r(\bar{A})$$

Ранг основной матрицы равен рангу расширенной — система совместна (Кронекер–Капелли).

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Ступенчатый вид: каждое следующее уравнение короче предыдущего.
- ✓ Строка вида $0 = b$, где b не ноль — решений нет.
- ✓ $r = n$ — определённая; $r < n$ — неопределённая.
- ✓ Жордан–Гаусс: приводим к единичной матрице — ответ виден сразу.



КАК В ЖИЗНИ

Как лесенка в песочнице: сначала строишь ступеньки, потом по ним спускаешься.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

ступенчатый вид уравнения идут лесенкой, каждое короче предыдущего

ранг число главных строк после упрощения

базисные неизвестные неизвестные, которые выражаем через остальные

🎯 Какая строка означает, что решений нет?

- ✓ Вида $0 = b$, где b не равно нулю.

4

Однородные системы и ФСР

Однородная система — все справа нули. Ноль-решение всегда подходит, но бывают и другие ответы.



Все справа нули



Ноль всегда подходит



$r < n$?



Есть другие решения

однородная система

$$X = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k, k = n - r$$

$e_1 \dots e_k$ — фундаментальная система решений (ФСР). $c_1 \dots c_k$ — любые числа. n — число неизвестных.

ЗАПОМНИ

- ✓ Ненулевые решения есть, если ранг r меньше n .
- ✓ Если определитель системы не ноль — только нулевое решение.
- ✓ ФСР — набор независимых решений, остальные — их сочетания.
- ✓ Общее решение неоднородной = частное + общее однородной.



КАК В ЖИЗНИ

Как смесь конфет: сколько взял каждого сорта, такой и получился набор.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

однородная система все свободные члены равны нулю

фундаментальная система решений набор решений, через который выражается всё

тривиальное решение все неизвестные равны нулю

🎯 Какое решение всегда есть у однородной системы?

- ✓ Нулевое: все неизвестные равны нулю.

📎 Оригинал в курсе: SystemLinearEquations.pdf

📎 Практики по теме: №3 — Системы уравнений



1 Линейное пространство

Линейное пространство — это набор «штук», которые можно складывать и умножать на число.



Числа



Таблицы одного размера

Наборы из n чисел

вот примеры таких наборов

$$x + y = y + x; \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

Первое: порядок сложения не важен. Второе: число «раскрывает скобки».

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Сумма двух элементов тоже элемент пространства.
- ✓ Элемент, умноженный на число, тоже в пространстве.
- ✓ Подпространство — часть пространства, где тоже можно складывать и умножать.



КАК В ЖИЗНИ

Две кучки конфет сложить — получится одна кучка. Кучку утроить — конфет станет втрое больше.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

вектор — любой элемент линейного пространства, не обязательно стрелка

аксиомы — 8 правил, которые должны выполняться

арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ — наборы из n чисел, например $(1; 2; -2)$

🎯 Что нужно, чтобы набор был линейным пространством?

- ✓ Сложение, умножение на число и 8 правил.

2 Линейная зависимость

Если из одних векторов можно собрать другой, набор лишний. Такой набор зависимый.



Векторы



Умножь на числа



Сложи всё



Вышел ноль?

ноль при ненулевых числах — набор зависимый

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

Если хотя бы одно λ не ноль, набор зависимый. Если все λ нули, независимый.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Если один вектор — сумма остальных с числами, набор зависимый.
- ✓ Нулевой вектор в наборе делает его зависимым.
- ✓ Если часть набора зависима, весь набор тоже зависим.



КАК В ЖИЗНИ

Конструктор: если деталь собирается из других, она лишняя. Её можно не брать.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

линейная комбинация — сумма векторов, каждый умножен на своё число

линейно независимые — ни один вектор не собирается из остальных

🎯 Когда набор векторов зависимый?

- ✓ Когда сумма с числами даёт ноль, а числа не все нули.

3 Базис и координаты

Базис — это главные «кубики» пространства. Любой вектор собирается из них ровно одним способом.

- 1 Выбери n независимых векторов — это базис.
- 2 Разложи любой вектор по базису.
- 3 Числа перед кубиками — координаты вектора.

$$x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n$$

Читается: «икс равно икс-один эф-один плюс...». Числа $x_1 \dots x_n$ — координаты x .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Базис в n -мерном пространстве — n независимых векторов.
- ✓ Складываются векторы — складываются и их координаты.
- ✓ Вектор MN : координаты конца N минус координаты начала M .



КАК В ЖИЗНИ

Башня из кубиков: «два красных, один синий». Числа — сколько кубиков каждого цвета.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

базис набор независимых векторов, из которых всё собирается

координаты числа, сколько базисных векторов взять

размерность число векторов в базисе

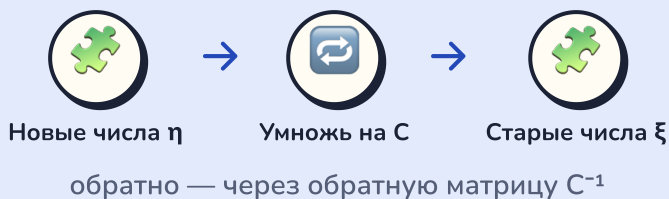
изоморфизм соответствие, которое сохраняет сложение и умножение на число

🎯 Что такое координаты вектора?

- ✓ Числа, на которые умножаем базисные векторы, чтобы получить вектор.

4 Переход к другому базису

Один и тот же вектор можно описать разными базисами. Есть правило, как пересчитать числа.



$$\xi = C \cdot \eta; \eta = C^{-1} \cdot \xi$$

Старые координаты получаем умножением на C . Обратно — на обратную матрицу C^{-1} .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ В столбцах C записаны новые базисные векторы в старом базисе.
- ✓ Для ортонормированных базисов $Q^{-1} = Q^T$: обратная матрица равна транспонированной.



КАК В ЖИЗНИ

Рубли в доллары — по курсу. Доллары обратно в рубли — по обратному курсу. Это C и C^{-1} .

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

матрица перехода C таблица, которая пересчитывает координаты из одного базиса в другой

ортонормированный базис базис из перпендикулярных векторов длины 1

🎯 Как найти старые координаты по новым?

- ✓ Умножить новые координаты на матрицу C .

5 Аффинное пространство

Аффинное пространство — это точки, между которыми можно проводить стрелки-векторы. Как карта: города — точки, а стрелка из одного города в другой — вектор.

- 1 Есть множество точек A и линейное пространство векторов
- 2 Каждой паре точек (M, N) соответствует вектор MN : от M к N
- 3 Для любой точки M и вектора x найдётся точка N , что $MN = x$
- 4 Правило треугольника: $MN + NP = MP$

что нужно, чтобы получилось аффинное пространство

$$MN + NP = MP$$

Пройти из M в N , потом из N в P — то же самое, что сразу из M в P .

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Следствия: вектор MM — нулевой, а $NM = -MN$.
- ✓ Размерность n у аффинного пространства A_n та же, что у его линейного пространства.
- ✓ Аффинная система координат: выбираем точку O (начало) и базис $e_1, \dots, e_n$; координаты точки M — это координаты её радиус-вектора OM .
- ✓ Координаты вектора MN — это координаты конца N минус координаты начала M , потому что $MN = ON - OM$.



КАК В ЖИЗНИ

Как карта дорог: два пути из города M в город P , напрямую или через N , приводят в одно место. Расстояние в километрах можно сложить, а вот «где начало» выбираем сами.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

аффинное пространство — точки плюс векторы между ними с правилом треугольника

радиус-вектор — вектор OM из начала координат O в точку M

аффинная система координат — начало O и базис векторов

🎯 Как найти координаты вектора MN , если известны координаты точек M и N ?

✓ Из координат конца N вычесть координаты начала M .

📎 Оригинал в курсе: [LinearSpaces.pdf](#)

📎 Практики по теме: №4 — Векторные пространства; №5 — Аффинные пространства



1 Скалярное произведение

Скалярное произведение перемножает два вектора. Результат — обычное число, а не стрелка.



Два вектора



Перемножь пары чисел



Сложи результаты



Одно число

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$$

Перемножь числа с одинаковыми номерами и сложи всё. Получится число.

ЗАПОМНИ

- ✓ Длина вектора: $|x| = \sqrt{(x, x)}$.
- ✓ Угол между векторами: $\cos \phi = (x, y) / (|x| \cdot |y|)$.
- ✓ Если $(x, y) = 0$, векторы перпендикулярны (ортогональны).
- ✓ Неравенство Коши–Буняковского: $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$.



КАК В ЖИЗНИ

Как посчитать очки в игре: в каждом раунде перемножь, а итоги сложи.

СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

- скалярное произведение** — число, которое получается из двух векторов
- евклидово пространство** — пространство, где есть скалярное произведение и длины
- ортогональные векторы** — перпендикулярные векторы: их скалярное произведение равно нулю

🎯 Что получится, если перемножить два вектора скалярно?

- ✓ Обычное число.

2 Векторное произведение

Векторное произведение двух стрелок — это новая стрелка. Она смотрит перпендикулярно обеим.

- 1 Направь указательный палец на вектор a .
- 2 Средний палец — на вектор b .
- 3 Большой палец покажет вектор $c = a \times b$.

$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$$

Длина новой стрелки равна площади параллелограмма на a и b . φ — угол между ними.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ c перпендикулярен a и b ; тройка a, b, c правая.
- ✓ Векторы параллельны, если $a \times b = 0$.
- ✓ В координатах: определитель 3×3 с i, j, k в первой строке.
- ✓ Площадь треугольника ABC : $S = \frac{1}{2} \cdot |AB \times AC|$.



КАК В ЖИЗНИ

Положи две палочки на стол. Третья палочка торчит вверх — перпендикулярна им обеим.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

векторное произведение вектор $c = a \times b$, перпендикулярный a и b

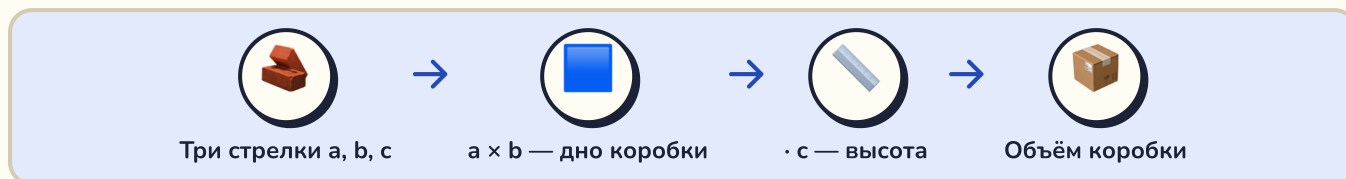
правая тройка a, b, c как указательный, средний и большой пальцы правой руки

🎯 Что будет, если поменять a и b местами?

- ✓ Вектор сменит направление: $a \times b = -(b \times a)$.

3 Смешанное произведение

Смешанное произведение — это три стрелки. Результат — число: объём коробки, построенной на них.



$$V = |(a \times b) \cdot c|$$

Объём параллелепипеда. Знак «плюс» — правая тройка, «минус» — левая.

ЗАПОМНИ

- ✓ В координатах: определитель 3×3 из строк координат a, b, c .
- ✓ Ноль, если векторы лежат в одной плоскости (компланарны).
- ✓ Пирамида: $V = (1/6) \cdot |(AB \times AC) \cdot AD|$.



КАК В ЖИЗНИ

Сколько кубиков влезет в коробку? Площадь дна умножь на высоту.

СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

смешанное произведение число $(a \times b) \cdot c$: сначала векторное, потом скалярное

компланарные векторы векторы, которые лежат в одной плоскости

параллелепипед коробка, у которой все грани — параллелограммы

🎯 Что означает ноль в смешанном произведении?

- ✓ Векторы лежат в одной плоскости.

4 Ортонормированный базис

Ортонормированный базис — это перпендикулярные стрелки длины 1. Любой базис можно так сделать.

- 1 Возьми любой базис $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- 2 Первый вектор оставь: $b_1 = a_1$.
- 3 Второй подправь, чтобы стал перпендикулярен b_1 .
- 4 Раздели каждый вектор на его длину.

$$b_2 = a_2 - ((a_2, b_1) / (b_1, b_1)) \cdot b_1$$

Так b_2 становится перпендикулярен b_1 . Остальные векторы — по тому же правилу.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Ненулевые попарно перпендикулярные векторы всегда независимы.
- ✓ Ортонормированный: перпендикулярны, и все длины равны 1.
- ✓ Стандартный базис $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots$ — ортонормированный.



КАК В ЖИЗНИ

Как палочки в решётке: одна вертикально, другая горизонтально, и все одной длины.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

ортogonalный базис базис из попарно перпендикулярных векторов

ортонормированный базис ортogonalный базис, где все векторы длины 1

ортogonalизация процесс, который делает базис перпендикулярным

🎯 Какие векторы образуют ортонормированный базис?

- ✓ Перпендикулярные друг другу, каждый длиной 1.

📎 Оригинал в курсе: VectorProduct.pdf

📎 Практики по теме: №6 — Произведения векторов



1 Линейное отображение

Линейное отображение — умная машинка. Сложение и умножение на число проходят через неё без изменений.

Сначала сложи

- Сложи v_1 и v_2
- Отдай сумму машине

Сначала машина

- Отдай v_1 и v_2 машине
- Сложи два ответа

результат одинаковый

$$A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 A(v_1) + \lambda_2 A(v_2)$$

Одна формула заменяет два правила: сложение и умножение на число. Ноль переходит в ноль.

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Инъективно: разным входам соответствуют разные выходы.
- ✓ Сюръективно: каждый элемент W получается из какого-то входа.
- ✓ Биективно: и инъективно, и сюръективно. Тогда отображение обратимо.
- ✓ Линейное отображение задаётся образами базисных векторов.



КАК В ЖИЗНИ

Ксерокс увеличивает всё в 2 раза. Сложить рисунки и увеличить — то же, что увеличить и сложить.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

отображение правило: каждому элементу V ставится в соответствие один элемент W

образ и прообраз образ — результат; прообраз — то, из чего он получился

🎯 Какие два условия делают отображение линейным?

- ✓ Сумма переходит в сумму образов, число выносится за знак.

2 Ядро и образ

Ядро — всё, что превращается в ноль. Образ — всё, что получилось на выходе.

Ядро $\text{Ker } A$

- Векторы, которые стали нулём

Образ $\text{Im } A$

- Всё, что получилось на выходе

$$\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = \dim V$$

Размер ядра плюс размер образа равен размеру исходного пространства.

📌 ЗАПОМНИ

- ✓ Ядро и образ — тоже подпространства: «комнатки» внутри пространств.
- ✓ Инъективно тогда и только тогда, когда ядро состоит из одного нуля.
- ✓ Сюръективно, когда ранг равен $\dim W$.
- ✓ Биективно и обратимо, когда матрица квадратная и невырожденная.



КАК В ЖИЗНИ

Машина-сортировщик часть игрушек выбрасывает в корзину, а остальные кладёт на полку. Вместе — все игрушки.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

ядро $\text{Ker } A$ все векторы, которые превращаются в ноль

дефект и ранг дефект — размер ядра; ранг — размер образа, он равен рангу матрицы

🎯 Когда линейное отображение инъективно?

- ✓ Когда ядро состоит только из нулевого вектора.

3 Матрица отображения

Матрица отображения записывает, во что превратился каждый базисный кубик.

- 1 Выбери базис в V и базис в W .
- 2 Найди образ первого базисного вектора.
- 3 Разложи его по базису W — это первый столбец.
- 4 Повтори для остальных базисных векторов.

$$w = A \cdot v$$

Координаты образа w получаем умножением матрицы A на координаты прообраза v .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Тожественное отображение: матрица — единичная E .
- ✓ Поворот на угол ϕ : матрица с $\cos \phi$ и $\sin \phi$.
- ✓ Нулевое отображение: матрица из одних нулей.
- ✓ Дифференцирование: x^k переходит в $k \cdot x^{k-1}$.



КАК В ЖИЗНИ

Таблица переводов: каждый столбец говорит, во что превратился один базисный кубик.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

матрица линейного отображения — таблица из координат образов базисных векторов

координатный столбец — столбик координат вектора в выбранном базисе

🎯 Что записываем в первый столбец матрицы?

- ✓ Координаты образа первого базисного вектора.

4

Линейные операторы

Оператор — линейное отображение пространства в само себя. Его матрица меняется при смене базиса.



Матрица A в базисе e



Пересчёт: $S^{-1} \cdot A \cdot S$



Матрица A в базисе f

$$A_f = S^{-1} \cdot A_e \cdot S$$

S — матрица перехода от базиса e к базису f. Такие матрицы называют подобными.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Поворот на угол ϕ : вектор крутится против часовой стрелки.
- ✓ Гомотетия с λ растягивает векторы в λ раз; при $\lambda = -1$ — центральная симметрия.
- ✓ Проекция на L_1 параллельно L_2 : остаётся часть из L_1 .
- ✓ Отражение от L_1 вдоль L_2 : часть из L_2 меняет знак.



КАК В ЖИЗНИ

Одна карта города в разных масштабах: цифры другие, а город тот же.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

линейный оператор — линейное отображение пространства в самого себя

подобные матрицы — матрицы одного и того же преобразования в разных базисах

🎯 Что делает гомотетия с $\lambda = 2$?

✓ Растягивает каждый вектор в 2 раза.

📎 Оригинал в курсе: LinearMapping1 · LinearMapping2.pdf

📎 Практики по теме: №7 — Линейные отображения



1 Логика, множества, кванторы

Математика говорит очень точно. Любое утверждение бывает либо верным, либо неверным. Как строгий судья!



Верно или неверно И Л, ИЛИ $\vee$, НЕ $\neg$ Если А, то В $\Rightarrow$ Для всех $\forall$, есть $\exists$

главные значки логики

$$\neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x)$$

«Не у всех верно» значит: найдётся хотя бы один, у кого нет.

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ «Земля вращается вокруг Солнца» — верно. «6 делится на 4» — неверно.
- ✓ «Если А, то В» ложно только тогда, когда А верно, а В неверно.
- ✓ Множество — набор объектов с общим признаком. Например, деревья в парке.
- ✓ Из «если А, то В» не всегда следует обратное «если В, то А».



КАК В ЖИЗНИ

Как лампочка: горит или не горит. Середины не бывает.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

высказывание утверждение, которое верно или неверно

импликация $\Rightarrow$ «если А, то В»

квантор знак «для всех» $\forall$ или «существует» $\exists$

пересечение $\cap$ то, что есть и в первом, и во втором множестве

🎯 Что значит значок $\forall$?

- ✓ «Для всех».

2 Метод математической индукции

Как доказать, что правило верно для всех чисел? Проверь первое и докажи переход к следующему.

- 1 База: проверь первый случай ($n = n_0$).
- 2 Шаг: если верно для k , докажи для $k + 1$.
- 3 Вывод: верно для всех $n \geq n_0$.

метод математической индукции

$$k \in A \Rightarrow k + 1 \in A$$

Если верно для k , то верно и для $k + 1$.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Метод нужен для утверждений, которые зависят от натурального n .
- ✓ Пример: неравенство Бернулли доказывают именно этим методом.
- ✓ Нужны все три шага: база, шаг и вывод.



КАК В ЖИЗНИ

Как домино: толкнул первую костяшку, и она сбивает следующую, и так далее.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

база индукции проверка первого случая

шаг индукции переход от k к $k + 1$

🎯 Какие три шага у метода индукции?

- ✓ База, шаг индукции и вывод.

3 Предел последовательности

Представь, что ты идёшь к воротам. Номер n растёт, и числа x_n всё ближе подходят к числу a .



так выглядит предел

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon$$

Для любого малого ε найдётся номер N . Дальше все x_n ближе к a , чем на ε .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Предел единственный. Сходящаяся последовательность ограничена.
- ✓ Растёт и не выше какого-то числа — значит, сходится.
- ✓ Важный предел: $\lim (1 + 1/n)^n = e \approx 2,718$.
- ✓ Из ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся часть.



КАК В ЖИЗНИ

Как будто идёшь к воротам: с каждым шагом остаётся всё меньше дороги.

📖 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

предел последовательности число, к которому подходят члены при большом n

ограниченная все члены не уходят дальше какого-то числа M

монотонная всё время растёт или всё время убывает

подпоследовательность часть последовательности с растущими номерами

🎯 Последовательность растёт и не выше какого-то числа. Что с ней?

- ✓ Она сходится.

4 Предел функции

Функция — машинка: ты даёшь x , а она выдаёт $f(x)$. Предел — число, к которому приходит ответ, когда x подходит к x_0 .

Подходим слева

- x меньше x_0
- ответ стремится к A

Подходим справа

- x больше x_0
- ответ стремится к A

оба пути ведут к одному числу A

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Для любого малого ε найдётся δ . Если x близко к x_0 , то $f(x)$ близко к A .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Предел суммы — сумма пределов. Так же с произведением; частное — если делитель не ноль.
- ✓ Если f зажата между ϕ и g , а ϕ и g стремятся к A , то f тоже стремится к A .
- ✓ Предел есть ровно тогда, когда левый и правый пределы равны.
- ✓ Предел A значит: $f(x) = A +$ крошечный хвостик, который стремится к нулю.



КАК В ЖИЗНИ

Как два пути к одному дому: идёшь слева или справа — придёшь к одному подъезду.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

δ (дельта) маленький радиус вокруг x_0 , который мы выбираем

односторонний предел предел, когда подходим только слева или только справа

бесконечно малая величина, которая стремится к нулю

частное пределов делить пределы можно, если делитель не равен нулю

🎯 Когда у функции есть предел в точке x_0 ?

- ✓ Когда левый и правый пределы существуют и равны.

📎 Оригинал в курсе: [IntroductionMathAnal · LimitSequence.pdf](#)

📎 Практики по теме: №8 — Предел последовательности; №9 — Предел функции



1 Непрерывность в точке

Непрерывная функция — та, у которой нет скачков. График можно нарисовать, не отрывая карандаш.



Значение в точке есть



Подходим слева и
справа



Приходим к $f(x_0)$

три шага непрерывности

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Предел в точке равен значению в точке. Так пишут «без дырок».

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Функция в точке x_0 определена.
- ✓ Слева и справа подходим к одному числу — пределу.
- ✓ Это число равно $f(x_0)$.



КАК В ЖИЗНИ

Как мультик без пропущенных кадров: каждый кадр плавно продолжает предыдущий.

📖 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

непрерывность график без скачков и дырок

предел число, к которому подходят значения функции

🎯 Что значит «функция непрерывна в точке»?

- ✓ Её предел в точке равен её значению там.

2 Точки разрыва

Разрыв — место, где график «рвётся». Таких мест бывает два вида.

Первого рода

- Оба предела существуют
- Скачок или дырка
- Пример: целая часть $[x]$

Второго рода

- Хотя бы один предел не существует
- Пример: $1/x$ в точке 0

два вида разрыва

x_0 — разрыв 1-го рода $\Leftrightarrow$ существуют оба односторонних предела

Если оба предела есть — первого рода. Иначе — второго рода.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Первого рода: оба односторонних предела существуют.
- ✓ Второго рода: хотя бы один предел не существует.
- ✓ Если оба предела равны, разрыв устранимый — дырку можно заклеить.



КАК В ЖИЗНИ

Как ступенька на дорожке: шагнул — и сразу выше.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

точка разрыва место, где функция не непрерывна

устранимый разрыв пределы слева и справа совпадают

🎯 Какой разрыв у $1/x$ в точке 0?

- ✓ Второго рода: один из пределов не существует.

3 Свойства непрерывных функций

Если функция на отрезке без дыр, у неё есть важные свойства.

- 1 Раздели отрезок пополам.
- 2 Оставь половину, где знак меняется.
- 3 Повторяй деление снова и снова.
- 4 Так найдёшь точку, где функция равна нулю.

метод половинного деления

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow f(\xi) = 0 \text{ для некоторого } \xi \in (a, b)$$

Знаки на концах разные — внутри точно есть ноль.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Вейерштрасс: есть наибольшее и наименьшее значение.
- ✓ Больцано–Коши: встречаются все значения между A и B.
- ✓ Если на концах знаки разные, внутри есть ноль.



КАК В ЖИЗНИ

Ты шёл от подножия к вершине без прыжков. Значит, побывал на каждой высоте между ними.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

отрезок $[a, b]$ все числа от a до b, включая концы

метод половинного деления делишь отрезок пополам и оставляешь половину со сменой знака

🎯 Что говорит теорема о нуле?

- ✓ Если на концах знаки разные, внутри есть ноль.

4 Элементарные функции

Элементарные функции — синус, логарифм, степень — без дыр там, где определены.



$\sin x, \cos x$



$\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$



a^x



$\log_a x, x^a$

все они непрерывны там, где определены

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

Синус подходит к нулю, когда x подходит к нулю. По этому доказывают непрерывность синуса.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Сумма, произведение и частное тоже непрерывны (на ноль не делим).
- ✓ Функция внутри функции тоже непрерывна.
- ✓ Обратная к строго возрастающей непрерывной тоже непрерывна.



КАК В ЖИЗНИ

Как дорога из ровных плиток: без дыр и ступенек, по ней едешь везде, где она есть.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

элементарная функция построена из основных функций сложением, умножением и вложением

сложная функция одна функция подставлена внутрь другой

🎯 Непрерывен ли синус?

- ✓ Да, везде, где он определён.

📎 Оригинал в курсе: ContinuousFunctions.pdf

📎 Практики по теме: №10 — Непрерывность функций



ЛЕКЦИЯ 8 · ЧАСТЬ II

Дифференцируемость функций одной переменной

1 Что такое производная

Производная — это спидометр функции. Она показывает, как быстро функция меняется.

- 1 Возьми маленький шаг Δx .
- 2 Найди $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
- 3 Раздели Δy на Δx .
- 4 Делай шаг всё меньше. Предел и есть производная.

алгоритм производной

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x$$

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ y' , $f'(x)$ и dy/dx — записи одной и той же производной.
- ✓ Производная — скорость изменения функции в точке.
- ✓ Примеры: $(C)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.



КАК В ЖИЗНИ

Спидометр в машине показывает скорость прямо сейчас. Производная — то же для функции.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

приращение на сколько изменилось: новое значение минус старое

дифференцирование поиск производной

🎯 Чему равна производная постоянной C ?

- ✓ Нулю: $C' = 0$.

2 Правила дифференцирования

Есть готовые правила. Не надо каждый раз считать предел заново.



$$\sin x \rightarrow \cos x$$



$$\cos x \rightarrow -\sin x$$



$$e^x \rightarrow e^x$$



$$\ln x \rightarrow 1/x$$

строчки таблицы производных

$$(u / v)' = (u' \cdot v - u \cdot v') / v^2$$

Производная дроби. Знаменатель v не должен быть нулём.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ $(u \pm v)' = u' \pm v'$ — суммы считаем по частям.
- ✓ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
- ✓ $(C \cdot u)' = C \cdot u'$: константу выносим за знак.
- ✓ Таблицу основных производных учат наизусть.



КАК В ЖИЗНИ

Как таблица умножения: выучил один раз — и считаешь быстро.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

таблица производных готовые ответы для основных функций

правило дифференцирования готовый способ найти производную суммы, произведения или дроби

🎯 Чему равна производная $\sin x$?

✓ $\cos x$.

3 Касательная и скорость

Производная показывает наклон графика в точке. Чем круче горка, тем больше производная.

Касательная

- Касается графика в одной точке
- Наклон $k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$
- Уравнение: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Нормаль

- Перпендикулярна касательной
- Наклон $-1 / f'(x_0)$

две прямые в точке касания

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Механика: скорость — это производная пути, $v(t) = s'(t)$.
- ✓ Пример: $y = x^2 - 4x + 7$ при $x_0 = 3$ даёт касательную $y = 2x - 2$.
- ✓ Точка касания: x_0 и $y_0 = f(x_0)$.



КАК В ЖИЗНИ

Касательная — как линейка, которая едва касается горки в одной точке.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

касательная — прямая, которая касается графика в одной точке

нормаль — прямая через точку касания, перпендикулярная касательной

🎯 Что равно наклону касательной?

- ✓ Производная $f'(x_0)$, то есть $\operatorname{tg} \alpha$.

4 Сложная, обратная, неявная функции

Сложную функцию разбирай по шагам: сначала внешняя часть, потом внутренняя.

- 1 Выдели внутреннюю функцию $u(x)$.
- 2 Продифференцируй внешнюю функцию по u .
- 3 Умножь на производную $u(x)$ по x .
- 4 Проверка: $(\cos(ax + b))' = -a \cdot \sin(ax + b)$.

сложная функция по шагам

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

Производная сложной функции: производная снаружи умножить на производную внутри.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Обратная: $(f^{-1})'(y_0) = 1 / f'(x_0)$, если $f'(x_0) \neq 0$.
- ✓ Неявная $F(x, y) = 0$: продифференцируй обе части. Пример: $x^2 + y^2 = 1$ даёт $y' = -x/y$.
- ✓ Параметрическая $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$: $y' = \psi'(t) / \phi'(t)$.
- ✓ Вторая производная — производная от первой: $f'' = (f')'$.



КАК В ЖИЗНИ

Как матрёшка: сначала открываешь большую, потом маленькую внутри.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

сложная функция одна функция подставлена внутрь другой

параметрическое задание x и y заданы через третью переменную t

🎯 С чего начинают искать производную сложной функции?

- ✓ С выделения внутренней функции $u(x)$.



Оригинал в курсе: FunctionDerivative · ImplicitParametricHigherOrderDeriv.pdf



Практики по теме: №11 — Дифференцируемость функций; №12 — Производные неявных функций



1 Высшие производные

Производная от производной — это вторая производная. Она показывает, как меняется сама скорость.



f — путь



f' — скорость



f'' — разгон

каждый раз берём производную ещё раз

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0..n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}, \text{ где } C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$$

Формула Лейбница: производная n -го порядка от произведения. Читается как сумма слагаемых с числами C .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$ — сумму дифференцируем по частям.
- ✓ $(cf)^{(n)} = c \cdot f^{(n)}$ — число c выносится наружу.
- ✓ Второй дифференциал: $d^2f = f'' \cdot (dx)^2$. Верно, если x — независимая переменная.



КАК В ЖИЗНИ

Машина едет: путь, потом скорость, потом разгон. Каждый шаг — производная от предыдущего.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

производная n -го порядка производная от производной, взятая n раз

формула Лейбница правило для производной n -го порядка от произведения

дифференциал маленькое изменение функции, записанное через dx

🎯 Что такое $f^{(2)}$?

- ✓ Производная от производной f' .

2 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши

Между двумя точками графика есть место, где касательная параллельна хорде. Это главная мысль теорем о среднем.



Ферма



Роль



Лагранж



Коши

Коши обобщает Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a), \xi \in (a; b)$$

Формула Лагранжа (конечных приращений). Читается: есть точка ξ между a и b , где наклон касательной равен наклону хорды.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Ферма: в самой высокой или низкой точке $f' = 0$.
- ✓ Роль: если $f(a) = f(b)$, то есть точка с $f' = 0$.
- ✓ Коши: $(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)) = f'(\xi)/g'(\xi)$. Лагранж — частный случай при $g(x) = x$.



КАК В ЖИЗНИ

Вы ехали 2 часа с мамой. Хотя раз спидометр показал вашу среднюю скорость.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

касательная — прямая, которая касается графика в одной точке

хорда — прямая между двумя точками графика

теорема Ролля — если $f(a) = f(b)$, то есть точка с $f' = 0$

🎯 Что говорит теорема Лагранжа о касательной?

- ✓ Есть точка, где она параллельна хорде.

3 Формула Тейлора

Гладкую функцию рядом с точкой можно записать как многочлен и маленький хвостик. Это формула Тейлора.

- 1 Найди $f(x_0)$ и её производные в точке x_0
- 2 Раздели каждую производную на $k!$
- 3 Умножь на $(x - x_0)^k$
- 4 Сложи всё — получится многочлен Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0..n} f^{(k)}(x_0)/k! \cdot (x - x_0)^k + r_n(x)$$

Функция = многочлен Тейлора + остаток r_n . При $x_0 = 0$ это формула Маклорена.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Остаток $r_n = o((x - x_0)^n)$: рядом с x_0 он очень мал.
- ✓ Форма Лагранжа: $r_n = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! \cdot (x - x_0)^{n+1}$, ξ между x_0 и x .
- ✓ $e^x = 1 + x + x^2/2! + \dots$; $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$



КАК В ЖИЗНИ

Как собирать конструктор: сначала главная деталь, потом поправки, и ещё поправки.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

многочлен Тейлора первые слагаемые формулы Тейлора

формула Маклорена формула Тейлора при $x_0 = 0$

факториал $k!$ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$, например $3! = 6$

🎯 Что такое формула Маклорена?

- ✓ Формула Тейлора при $x_0 = 0$.

4 Правило Лопиталя

Если предел даёт $0/0$ или ∞/∞ , можно взять производные сверху и снизу. Это правило Лопиталя.

- 1 Проверь: получилось $0/0$ или ∞/∞ ?
- 2 Возьми производную отдельно сверху и снизу
- 3 Посчитай новый предел f'/g'
- 4 Всё ещё $0/0$? Повтори шаги

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$$

Правило Лопиталя: если предел f'/g' существует, то предел f/g такой же. Рядом с точкой $g' \neq 0$.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Виды $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ сводят к дроби $0/0$ или ∞/∞ .
- ✓ Виды 0^0 , ∞^0 , 1^∞ — сначала логарифмируют.
- ✓ Не всегда помогает: $(2x + \sin x)/x$ при $x \rightarrow +\infty$ Лопиталем не берётся.



КАК В ЖИЗНИ

Две пустые горки конфет: та, что растёт быстрее, и даёт ответ.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

неопределённость предел, где сразу не видно ответ: $0/0$ или ∞/∞

правило Лопиталя предел отношения = предел отношения производных

🎯 Когда можно применить правило Лопиталя?

- ✓ Когда получается $0/0$ или ∞/∞ .

📎 Оригинал в курсе: `HighOrderDerivs · PropertiesDifferentiableFunctions.pdf`

📎 Практики по теме: №13 — Высшие производные



1 Возрастание и экстремумы

Производная подсказывает, куда идёт график: вверх или вниз. Это как горка.

- 1 Найди критические точки: $f' = 0$ или f' не существует
- 2 Раздели область определения на промежутки этими точками
- 3 Смотри знак f' на каждом промежутке
- 4 Знак $+$ — функция растёт, знак $-$ — убывает

$$f'(x) \geq 0 \text{ на } (a; b) \Leftrightarrow f \text{ возрастает на } (a; b)$$

Читается: если производная не отрицательная, функция растёт. Для убывания нужен знак $f' \leq 0$.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Максимум: слева $f' > 0$, справа $f' < 0$. Вершина горки.
- ✓ Минимум: слева $f' < 0$, справа $f' > 0$. Дно ямки.
- ✓ Ферма: в гладкой точке экстремума $f' = 0$. Обратное неверно: у x^3 в нуле $f' = 0$, но экстремума нет.



КАК В ЖИЗНИ

Катишься с горки: сначала вверх, потом вниз. Место разворота — это вершина.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

экстремум точка максимума или минимума функции

критическая точка точка, где $f' = 0$ или производной нет

стационарная точка точка, где $f' = 0$

🎯 Как называется точка, где $f' = 0$?

- ✓ Стационарная точка.

2 Выпуклость и перегибы

Вторая производная показывает, как график гнётся: как улыбка или как шапка.

$f'' > 0$

- выпукла вниз
- как улыбка
- график не ниже касательной

$f'' < 0$

- выпукла вверх
- как шапка
- график не выше касательной

$f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — минимум; $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — максимум

Признак экстремума через вторую производную. Сначала находим точку, где $f' = 0$.

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Перегиб: точка, где f'' меняет знак. Изгиб переворачивается.
- ✓ Перегибы ищи там, где $f'' = 0$ или f'' не существует.
- ✓ Если $f' = f'' = \dots = f^{(n-1)} = 0$, а $f^{(n)} \neq 0$: при чётном n экстремум, при нечётном — нет.



КАК В ЖИЗНИ

Миска с супом вогнутая, как улыбка. Крышка выпуклая, как шапка.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

выпуклость вниз график лежит не ниже своей касательной

точка перегиба точка, где изгиб графика меняется на противоположный

🎯 Какой знак у второй производной у «улыбки»?

- ✓ Плюс: $f'' > 0$.

3 Асимптоты

Асимптота — прямая, к которой график подходит всё ближе.

- 1 Область определения, разрывы, чётность
- 2 Монотонность и экстремумы по f'
- 3 Выпуклость и перегибы по f''
- 4 Асимптоты: вертикальные и наклонные
- 5 Точки пересечения с осями
- 6 Строим график

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x), y = k \cdot x + b$$

Наклонная асимптота $y = kx + b$. Если $k = 0$, она горизонтальная: $b = \lim f(x)$.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Вертикальная асимптота $x = x_0$, если $\lim f(x) = \infty$ при $x \rightarrow x_0$.
- ✓ Пример: $(x^2 + x)/(x - 2) = x + 3 + 6/(x - 2)$. Асимптоты: $y = x + 3$ и $x = 2$.
- ✓ Пример: $x^3/(x - 1)^2$: вертикальная $x = 1$, наклонная $y = x + 2$.



КАК В ЖИЗНИ

Как дорога, которая всё ближе подходит к прямой линии у горизонта.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

асимптота — прямая, к которой график подходит очень близко

наклонная асимптота — прямая $y = kx + b$

🎯 Какая асимптота получается при $k = 0$?

- ✓ Горизонтальная.

4 Наибольшее и наименьшее значение

Задача «самое большое» — например, самый большой прямоугольник. Ищем критические точки и концы отрезка.

- 1 Найди критические точки внутри отрезка
- 2 Вычисли f в этих точках
- 3 Вычисли f на концах отрезка
- 4 Самое большое значение — наибольшее, самое маленькое — наименьшее

$$\max[a; b] f = \max\{f(x_{\text{крит}}), f(a), f(b)\}$$

Работает на замкнутом отрезке, где функция непрерывна. Берём все кандидаты и сравниваем.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Пример: в треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник. Площадь $S(y) = (a/h) \cdot (h - y) \cdot y$.
- ✓ $S' = 0$ при $y = h/2$. Тогда основание $x = a/2$, а $S = ah/4$.
- ✓ Локальный максимум не всегда наибольший на отрезке: проверь концы.



КАК В ЖИЗНИ

Как найти самую высокую горку на карте: проверь вершины и края карты.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

наибольшее значение самое большое значение функции на отрезке

локальный экстремум максимум или минимум в маленькой окрестности точки

🎯 Где ищем наибольшее значение функции на отрезке?

- ✓ В критических точках и на концах отрезка.

📎 Оригинал в курсе: [FunctionExploration.pdf](#)

📎 Практики по теме: №14 — Использование производных; №15 — Построение графиков



1 Первообразная и интеграл

Интеграл — это обратный ход. Знаешь, как всё меняется, и ищешь, каким всё было.



Скорость f



Интегрируем



Путь $F + C$

обратная дорога

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Интеграл от эф от икс дэ икс равен эф от икс плюс цэ. Цэ — любое число.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ F — первообразная: её производная равна f .
- ✓ Интеграл суммы равен сумме интегралов.
- ✓ Число (не ноль) можно вынести за знак интеграла.



КАК В ЖИЗНИ

Как по скорости велосипеда узнать путь. Но стартовая точка может быть любой, поэтому пишем $+ C$.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

- первообразная** функция, у которой производная равна f
- неопределённый интеграл** все первообразные сразу: $F + C$
- постоянная C** любое число, его добавляем в конце

🎯 Зачем в ответе пишут $+ C$?

- ✓ Потому что стартовое число может быть любым.

2 Таблица интегралов

Есть готовые ответы на частые случаи. Их надо знать, как таблицу умножения.



Степень x^a



$1/x$



e^x



$\sin x$



$\cos x$

табличные интегралы

$$\int x^a dx = x^{a+1} / (a + 1) + C, a \neq -1$$

Икс в степени альфа: степень поднимаем на один и делим на новую степень. Альфа не равна минус единице.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ $\int dx/x = \ln|x| + C$, при $x \neq 0$.
- ✓ $\int e^x dx = e^x + C$ — экспонента сама себе равна.
- ✓ $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
- ✓ $\int \cos x dx = \sin x + C$.



КАК В ЖИЗНИ

Как таблица умножения: увидел знакомый пример и сразу знаешь ответ.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

табличный интеграл — готовая формула, её надо знать наизусть

🎯 Чему равен $\int \cos x dx$?

✓ $\sin x + C$.

3 Замена переменной

Сложный интеграл можно упростить заменой. Как в конструкторе: сложную деталь меняешь на простую.

- 1 Выбери замену: $u = \varphi(x)$.
- 2 Найди dx через du .
- 3 Посчитай простой интеграл.
- 4 Вернись к исходной букве x .

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$$

Икс заменяем на фи от тэ, дэ икс — на фи штрих от тэ, умножить на дэ тэ. В конце возвращаемся к иксу.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Замена помогает, когда новый интеграл проще старого.
- ✓ Пример: $\int \cos(ax)dx = (1/a) \cdot \sin(ax) + C$, $a \neq 0$.
- ✓ Пример: $\int x dx / (x^2+a^2) = 1/2 \cdot \ln(x^2+a^2) + C$.



КАК В ЖИЗНИ

Как с конструктором: сложную деталь меняешь на простую, считаешь, а потом ставишь старую обратно.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

замена переменной новая буква вместо сложного кусочка

🎯 Что делаем в самом конце замены?

- ✓ Возвращаемся к исходной букве x .

4 Интегрирование по частям

Иногда интеграл делят на две части. Как торт: сначала один кусок, потом остальное.



Делим на u и dv



Находим du и v



Подставляем в формулу



Считаем $\int v du$

интегрирование по частям

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Интеграл от u дэ v равен u умножить на v минус интеграл от v дэ u .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Не каждый выбор u и dv упрощает задачу.
- ✓ Иногда формулу применяют несколько раз.
- ✓ Пример: $\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$.
- ✓ Для $P_n(x) \cdot e^{\lambda x}$ применяют формулу n раз.



КАК В ЖИЗНИ

Как коробку конфет: сначала открываешь один ряд, потом второй. Так проще, чем сразу всё.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

интегрирование по частям способ: разбить интеграл на части u и dv

🎯 Что получится по формуле $\int u dv$?

✓ $u \cdot v - \int v du$.

📎 Оригинал в курсе: IndefiniteIntegral.pdf

📎 Практики по теме: №16 — Неопределённый интеграл; №17 — Замена переменной



1 Рациональные дроби

Дробь из двух многочленов — как пирог. Если верх ниже по степени, дробь «правильная».

Правильная

- Степень верха меньше степени низа
- Например: $x / (x^2 - 1)$

Неправильная

- Степень верха не меньше низа
- Сначала делим, как столбиком

$$P(x) / Q(x) = R(x) + P_1(x) / Q_1(x)$$

Пэ от икс на ку от икс равно эр от икс плюс пэ один на ку один. Дробь пэ один на ку один — правильная.

⌘ ЗАПОМНИ

- ✓ Степень многочлена — сколько раз x умножен сам на себя.
- ✓ Неправильную дробь сначала делим, как столбиком.
- ✓ Правильную дробь потом раскладываем на простые.



КАК В ЖИЗНИ

Как 7 конфет на двоих: по 3 каждому и одна лишняя. Лишняя — это как правильная дробь.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

многочлен — сумма степеней x с числами, например $x^2 - 1$

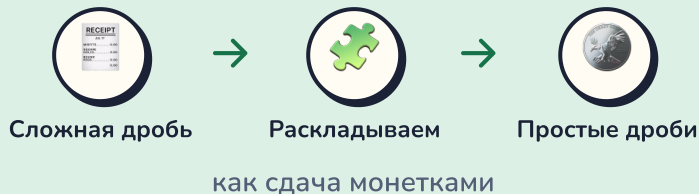
правильная дробь — степень верха меньше степени низа

🎯 Когда дробь называется правильной?

- ✓ Когда степень верха меньше степени низа.

2 Разложение на простые дроби

Правильную дробь можно разбить на простые кусочки. Как сдачу: крупную купюру меняют на монетки.



$$A / (x - a)^a + (Mx + N) / (x^2 + px + q)^b$$

Это элементарные дроби. Буквы A, M, N — числа, которые надо найти.

ЗАПОМНИ

- ✓ Любая правильная дробь раскладывается на элементарные.
- ✓ Числа ищем методом неопределённых коэффициентов.
- ✓ Подставь корни знаменателя: числа находятся быстрее.
- ✓ Пример: $x / ((x^2 - 1)(x - 2)) = -1 / (2(x - 1)) - 1 / (6(x + 1)) + 2 / (3(x - 2))$.



КАК В ЖИЗНИ

Как с купюрой: крупную сумму меняешь на монетки. Каждую монетку легко посчитать.

СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

элементарная дробь — простая дробь вида $A / (x - a)^n$ или $(Mx + N) / (x^2 + px + q)^n$

неопределённые коэффициенты — неизвестные числа, которые находим при разложении

🎯 Как называются простые дроби, на которые раскладываем?

- ✓ Элементарные рациональные дроби.

3 Интегралы простых дробей

Простые дроби интегрируются легко. Есть готовые рецепты для каждого вида.



$$1 / (x - a)$$



$$1 / (x - a)^n$$



$$\text{Квадрат } x^2 + px + q$$

три вида рецептов

$$\int A/(x - a) dx = A \cdot \ln|x - a| + C$$

Интеграл от А на икс минус а дэ икс равен А умножить на логарифм модуля икс минус а, плюс цэ.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ При $n \neq 1$: $\int A/(x-a)^n dx = -A / ((n-1)(x-a)^{n-1}) + C$.
- ✓ В квадрате $x^2 + px + q$ делаем замену $t = x + p/2$.
- ✓ Затем $\int dt/(t^2+a^2) = (1/a) \cdot \arctg(t/a) + C$.



КАК В ЖИЗНИ

Как рецепты в поваренной книге: увидел дробь нужного вида и достаёшь готовый рецепт.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

ln — натуральный логарифм, есть кнопка на калькуляторе

arctg — угол, у которого тангенс равен данному числу

🎯 Чему равен $\int dx/(x-a)$?

✓ $\ln|x-a| + C$.

4 Интеграл рациональной дроби

Любую рациональную дробь можно проинтегрировать по одному порядку. Как собирать пазл: сначала края, потом кусочки.

- 1 Выдели целую часть: дели верх на низ.
- 2 Разложи правильную дробь на элементарные.
- 3 Интегрируй каждое слагаемое отдельно.
- 4 Сложи ответы и не забудь + C.

$$\int x \, dx / ((x^2-1)(x-2)) = -\frac{1}{2} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{6} \cdot \ln|x+1| + \frac{2}{3} \cdot \ln|x-2| + C$$

Интеграл от x на x квадрат минус один, умножить на x минус два, равен сумме трёх логарифмов с коэффициентами. Плюс C .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Теорема: интеграл от рациональной дроби — через дроби, $\ln$ и $\arctg$.
- ✓ Знаменатель не должен обращаться в ноль на промежутке.
- ✓ Иногда короче решить другим способом, например по частям.



КАК В ЖИЗНИ

Как собирать пазл: сначала отделяешь крупные кусочки, потом каждый собираешь отдельно.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

рациональная функция дробь из двух многочленов

целая часть полные части, которые получаются при делении верха на низ

🎯 Что обычно получается в ответе?

- ✓ Рациональные дроби, $\arctg$ и $\ln$.

📎 Оригинал в курсе: [IntegralRationalIrrrational.pdf](#)

📎 Практики по теме: №18 — Интегрирование рациональных функций



1 Корни и подстановка t

Корни мешают считать. Заменяем их одной буквой t , и корни исчезнут.



$$t^m = (ax + b) / (cx + d)$$

Тэ в степени эм равно дробь: а икс плюс бэ на це икс плюс дэ. Эм — общий знаменатель степеней корня.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Для $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$ берём $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$.
- ✓ Ответ для $\int dx / (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$: $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} - 6 \cdot \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$.
- ✓ Для $\sqrt{(x-1)(x-2)}$ берём $t^2 = (x-2)/(x-1)$.



КАК В ЖИЗНИ

Как перевод денег в одну валюту: разные корни сводим к одной букве t .



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

иррациональная функция — функция, где x стоит под корнем

общий знаменатель — число, которое делится на все знаменатели степеней

🎯 Какую замену берём для $\int dx / (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$?

- ✓ $x = t^6$.

2 Подстановки Эйлера

Корень из квадратного трёхчлена тоже можно убрать. Для этого есть три подстановки Эйлера.

- 1 Если $a > 0$: корень $= \pm x\sqrt{a} \pm t$.
- 2 Если есть корни x_1 и x_2 : $t^2 = a(x-x_2)/(x-x_1)$.
- 3 Если $c > 0$: корень $= \pm\sqrt{c} \pm x \cdot t$.
- 4 Потом возводим в квадрат и выражаем x через t .

$$\sqrt{(ax^2 + bx + c)} = \pm x \cdot \sqrt{a} \pm t$$

Корень из a x квадрат плюс b x плюс c равен плюс-минус x корень из a , плюс-минус t . Знаки можно брать любые.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Возводим в квадрат и выражаем x через t .
- ✓ Если есть корни x_1 и x_2 : $t^2 = a(x-x_2)/(x-x_1)$.
- ✓ Если $c > 0$: корень $= \pm\sqrt{c} \pm x \cdot t$.
- ✓ Если $a < 0$ и корней нет, корень мнимый, такой случай не берём.



КАК В ЖИЗНИ

Как ключ к замку: подбираешь подходящую подстановку, и корень открывается.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

подстановка Эйлера замена, которая убирает корень из квадратного трёхчлена

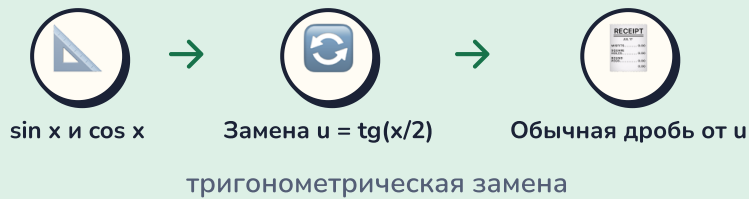
квадратный трёхчлен выражение вида $ax^2 + bx + c$

🎯 Что берём, если у трёхчлена есть корни x_1 и x_2 ?

✓ $t^2 = a(x-x_2)/(x-x_1)$.

3 Тригонометрические: $u = \operatorname{tg}(x/2)$

Синус и косинус тоже можно заменить одной буквой. Тогда всё станет обычной дробью.



$$\sin x = 2u / (1 + u^2), \cos x = (1 - u^2) / (1 + u^2)$$

Синус x равен два u на один плюс u квадрат. Косинус x равен один минус u квадрат на один плюс u квадрат. Здесь u — тангенс половины x .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ $u = \operatorname{tg}(x/2)$ — тангенс половины угла, новая буква.
- ✓ Иногда проще взять $u = \sin x$, $u = \cos x$ или $u = \operatorname{tg} x$.
- ✓ Пример: $\int dx / (1 + \sin x) = -2 / (1 + \operatorname{tg}(x/2)) + C$.
- ✓ Пример: $\int dx / \cos^4 x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x / 3 + C$, берём $u = \operatorname{tg} x$.



КАК В ЖИЗНИ

Как перевести все углы на один язык: вместо синуса и косинуса одна буква u .

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

тангенс (tg) отношение синуса к косинусу

dx через du $dx = 2du / (1 + u^2)$ при $u = \operatorname{tg}(x/2)$

🎯 Чему равен $\sin x$ через $u = \operatorname{tg}(x/2)$?

✓ $2u / (1 + u^2)$.

4 Синус, косинус и экспонента

Синус, косинус и показательная функция часто встречаются вместе. Для них есть готовые приёмы.



$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x$$



$$e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$$



$$x^n \cdot \sin x$$

три частых вида

$$\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \, dx = e^{\alpha x} \cdot (\beta \cdot \sin \beta x + \alpha \cdot \cos \beta x) / (\alpha^2 + \beta^2) + C$$

Интеграл от e в степени αx , на косинус βx , равен дроби: e в степени αx , на скобку из β синус βx плюс α косинус βx , делённое на $\alpha^2 + \beta^2$. Плюс C .

ЗАПОМНИ

- ✓ Берём по частям дважды: нужный интеграл появляется снова, его выражаем.
- ✓ $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$.
- ✓ Пример: $\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cos x + C$.
- ✓ Если степень $\sin$ или $\cos$ нечётная, берём $u = \cos x$ или $u = \sin x$.



КАК В ЖИЗНИ

Как качели: туда и обратно, и в итоге всё сходится к одному и тому же кусочку.

СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

$e^{\alpha x}$ показательная функция: e в степени $\alpha \cdot x$

повторное интегрирование по частям формула по частям применяется два раза подряд

🎯 Как разложить $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x$ в сумму?

👉 $\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$.

📎 Оригинал в курсе: Integrallrrational.pdf

📎 Практики по теме: №19 — Интегрирование иррациональных функций; №20 — Интегрирование тригонометрических функций



1 Интегральная сумма и площадь

Хочешь найти площадь под кривой? Режь её на тонкие полоски и складывай их площади.



Режем на полоски



Складываем площади



Делаем полоски
тоньше



Точная площадь

так находят точную площадь

$$\int_a^b f(x) dx = \lim(\lambda \rightarrow 0) \sum f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$$

Читается: «интеграл от а до б». Это предел суммы полосок, когда они очень тонкие.

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Если $f(x) \geq 0$, это площадь под графиком от а до b.
- ✓ Чем тоньше полоски, тем точнее ответ.
- ✓ Знак $\int$ — вытянутая буква S, от слова «сумма».



КАК В ЖИЗНИ

Как горка из песка: одна песчинка — ничего, а много крошек дают целую горку.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

определённый интеграл — предел суммы площадей тонких полосок

интегральная сумма — сумма площадей полосок до предела

ранг дробления λ — самая широкая полоска; её делаем всё меньше

🎯 Что делаем с полосками, чтобы получить точную площадь?

- ✓ Делаем их всё тоньше.

2 Свойства интеграла

У интеграла есть правила, как у конфет. Числа можно выносить, а куски — складывать.



Число выносим



Сумму делим



Отрезок режем



Больше — больше

главные правила интеграла

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

Отрезок от a до b можно разрезать точкой c . Площади кусков складываются.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Число можно вынести за знак: $\int a f \, dx = a \int f \, dx$.
- ✓ Интеграл суммы равен сумме интегралов.
- ✓ Поменяешь пределы местами — знак станет минусом.
- ✓ Если $f \geq g$ на отрезке, то $\int f \geq \int g$.



КАК В ЖИЗНИ

Как пирог, который ты съедаешь по кускам: первый кусок плюс второй дают весь пирог.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

теорема о среднем для непрерывной f найдётся c : $\int = f(c)(b - a)$

аддитивность интеграл по всему отрезку равен сумме кусков

🎯 Что будет, если отрезок разрезать точкой c ?

- ✓ Интеграл станет суммой двух кусков.

3 Формула Ньютона–Лейбница

Чтобы посчитать интеграл, найди первообразную F . Потом вычти значения на концах отрезка.

- 1 Найди первообразную $F(x)$
- 2 Подставь верхний предел b
- 3 Подставь нижний предел a
- 4 Вычти: $F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона–Лейбница. Здесь $F'(x) = f(x)$: F — первообразная для f .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Пример: $\int_1^4 \sqrt{x} dx = 14/3$. Первообразная: $(2/3) \cdot x^{3/2}$.
- ✓ Теорема Барроу: производная от $\int_a^x f(t) dt$ равна $f(x)$.
- ✓ По частям: $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$.
- ✓ Замена переменной: пределы пересчитываем по новой переменной.



КАК В ЖИЗНИ

Как копилка: чтобы узнать, сколько накопил за неделю, вычти сумму, что была в начале.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

первообразная функция, производная которой равна исходной

пределы интегрирования числа a и b внизу иверху знака $\int$

🎯 Как посчитать интеграл от a до b , если есть F ?

- ✓ Вычть $F(a)$ из $F(b)$.

4 Несобственные интегралы

Бывает, что площадь тянется в бесконечность. Тогда считаем предел: двигаем край всё дальше.

Сходится

- Предел конечный
- Площадь — обычное число

Расходится

- Предел бесконечный
- Или предела нет

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Считаем обычный интеграл до числа A . Потом смотрим, к чему он стремится, когда A растёт.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ $\int_0^{\infty} dx/(1+x^2) = \pi/2$ — сходится.
- ✓ $\int_2^{\infty} dx/x$ — расходится, предел равен ∞ .
- ✓ Если функция уходит в ∞ у края, отрезаем край: $\varepsilon \rightarrow 0$.
- ✓ $\int_0^1 dx/\sqrt{1-x} = 2$ — сходится, хотя у края ∞ .



КАК В ЖИЗНИ

Как ковёр, который тянется вдаль: он длинный, но его площадь может быть конечной.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

несобственный интеграл — интеграл с бесконечным краем или с бесконечной функцией

сходится — предел существует и равен обычному числу

расходится — предела нет или он равен бесконечности

🎯 Когда несобственный интеграл сходится?

- ✓ Когда предел существует и конечен.

5 Бесконечный разрыв внутри отрезка

Иногда функция «взрывается» не на краю, а посередине отрезка. Тогда режем интеграл в этой точке и подходим к ней с двух сторон по отдельности.

- 1 Найди точку c , где функция уходит в бесконечность
- 2 Раздели интеграл на две части: от a до c и от c до b
- 3 Слева подходим с ε_1 , справа с ε_2 — они стремятся к нулю независимо друг от друга
- 4 Оба предела конечны — интеграл сходится, иначе расходится

$$\int_a^b f dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f dx$$

Два предела считаются отдельно. Если хотя бы одна часть расходится, расходится и весь интеграл.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Главное значение (V.p.): берём одинаковое ε с двух сторон, то есть подходим к точке с симметрично.
- ✓ V.p. $\int_a^b f dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\int_a^{c-\varepsilon} f dx + \int_{c+\varepsilon}^b f dx)$. Он может существовать, когда сам интеграл расходится.
- ✓ Пример: $\int_0^3 x/(x^2-4) dx$ расходится (слева $-\infty$, справа $+\infty$), но в смысле главного значения равен $\ln(\sqrt{5}/2)$.



КАК В ЖИЗНИ

Как мост, обвалившийся посередине: к обрыву надо подойти с одного берега и с другого. Если с одной стороны пути нет, переехать нельзя.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

бесконечный разрыв точка, где функция уходит в бесконечность

главное значение предел при симметричном подходе к этой точке с двух сторон

🎯 Можно ли при проверке сходимости брать $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$?

- ✓ Нет, они независимы. Одинаковые ε дают только главное значение.

📎 Оригинал в курсе: DefiniteIntegrals.pdf

📎 Практики по теме: №21 — Определённый интеграл



1 Линии на плоскости

Линия на плоскости — это дорожка из точек. Её можно записать одной формулой с x и y .

- 1 Возьми формулу линии
- 2 Подставь x и y точки
- 3 Сошлось? Точка на линии!

так проверяем точку

$$F(x, y) = 0$$

F — формула линии. Точка лежит на линии, если её x и y подходят.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Порядок — наибольшая сумма степеней x и y в формуле.
- ✓ Прямая — линия первого порядка: $x + 2y + 2 = 0$.
- ✓ Парабола $y = x^2$ — линия второго порядка.
- ✓ Формула $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не задаёт никакой линии.



КАК В ЖИЗНИ

Как адрес дома: подставляешь координаты, и видно, живёт ли там точка.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

уравнение линии формула, которой подходят все точки линии и только они

порядок линии наибольшая сумма степеней x и y в уравнении

🎯 Что значит «точка лежит на линии»?

- ✓ Её координаты подходят под уравнение линии.

2 Уравнения прямой

Прямую можно записать разными формулами. Все они простые, первой степени.



Точка и стрелка



Наклон k



Две точки



Отрезки на осях

четыре знакомых способа

$$Ax + By + C = 0$$

«А икс плюс бэ игрек плюс цэ равно нулю». Так записывается любая прямая.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Через M_0 перпендикулярно $n\{A; B\}$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.
- ✓ Наклон: $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$, а b — отрезок на оси OY .
- ✓ Через две точки: $(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1)$.
- ✓ В отрезках: $x/a + y/b = 1$, где a и b — отрезки на осях.



КАК В ЖИЗНИ

Как дорожку во дворе: её можно описать от флажка до флажка или по наклону горки.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

нормальный вектор — стрелка, перпендикулярная прямой; её координаты — A и B

угловой коэффициент k — тангенс угла наклона прямой к оси OX

каноническое уравнение $(x - x_0)/m = (y - y_0)/n$, где $S\{m; n\}$ — направляющий вектор

🎯 Какой степени уравнение прямой?

✔ Первой: $Ax + By + C = 0$.

3 Угол между прямыми

Две прямые могут идти рядом, как рельсы. Или пересечься крестом.

Параллельны

- $k_1 = k_2$
- $A_1/A_2 = B_1/B_2$
- $m_1/m_2 = n_1/n_2$

Перпендикулярны

- $k_1 \cdot k_2 = -1$
- $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
- $m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

Наклоны перемножили — вышел минус единица. Значит, прямые пересеклись под прямым углом.

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Угол между прямыми: $\operatorname{tg} \theta = (k_1 - k_2)/(1 + k_1k_2)$.
- ✓ Параллельные прямые имеют одинаковый наклон k .
- ✓ Угол между прямыми равен углу между их нормальными векторами.
- ✓ Вертикальная прямая $x = x_0$ наклона не имеет, k у неё нет.



КАК В ЖИЗНИ

Как рельсы: идут рядом и не встречаются. Как палочки-крестики: встречаются ровно под прямым углом.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

параллельные прямые прямые, которые не пересекаются

перпендикулярные прямые прямые, которые пересекаются под углом 90°

🎯 Когда две прямые перпендикулярны?

- ✓ Когда $k_1 \cdot k_2 = -1$.

4 Расстояние до прямой

Расстояние от точки до прямой — самый короткий путь. Он идёт прямо, под прямым углом.

1 Возьми уравнение $Ax + By + C = 0$

2 Подставь x_0 и y_0 точки

3 Возьми модуль числа

4 Раздели на $\sqrt{A^2 + B^2}$

как найти расстояние

$$d = |Ax_0 + By_0 + C| / \sqrt{A^2 + B^2}$$

Подставь координаты точки. Возьми модуль. Раздели на длину вектора n .

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Пример: точка (5; 7) и прямая $2x - 3y - 4 = 0$.
- ✓ $d = |-15| / \sqrt{13} = 15/\sqrt{13} \approx 4,16$.
- ✓ Между параллельными: возьми точку на одной и измерь до другой.



КАК В ЖИЗНИ

Как путь до забора: самый короткий — прямо, а не наискосок через грядку.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

модуль число без минуса: $|-15| = 15$

длина вектора n $\sqrt{A^2 + B^2}$ — корень из суммы квадратов A и B

🎯 Как найти расстояние от точки до прямой?

- ✓ Подставить точку в $Ax + By + C$, взять модуль, поделить на $\sqrt{A^2 + B^2}$.

📎 Оригинал в курсе: PlaneGeometry.pdf

📎 Практики по теме: №22 — Прямая на плоскости



1 Окружность

Кривые второго порядка — линии, у которых в формуле степень не выше двух. Окружность — самая простая.



Окружность



Эллипс



Гипербола



Парабола

четыре кривые второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю.

ЗАПОМНИ

- ✓ Окружность — все её точки на одном расстоянии R от центра $M_0(x_0; y_0)$.
- ✓ Формула окружности: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
- ✓ Пример: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ — центр $(1; -3)$, $R = 2$.
- ✓ Эллипс, гипербола и парабола тоже кривые второго порядка.



КАК В ЖИЗНИ

Как круг из мелков на асфальте: все точки стоят ровно на одинаковом расстоянии от центра.

СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

центр окружности — точка, от которой все точки окружности одинаково далеко

радиус R — расстояние от центра до любой точки окружности

🎯 Какая формула у окружности с центром $(x_0; y_0)$?

👉 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

2 Эллипс

Эллипс — круг, который чуть вытянули. У него два фокуса, как два колышка для нитки.



нитка и два колышка

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

Икс в квадрате на а в квадрате, плюс игрек в квадрате на бэ в квадрате, равно единице.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Сумма расстояний до двух фокусов постоянна и равна $2a$.
- ✓ $b^2 = a^2 - c^2$, где $2c$ — расстояние между фокусами, $c < a$.
- ✓ Вершины: $(\pm a; 0)$ и $(0; \pm b)$. При $a = b$ получится окружность.
- ✓ Эксцентриситет $\varepsilon = c/a$ лежит от 0 до 1. Чем ближе к 1, тем сильнее вытянут.



КАК В ЖИЗНИ

Как садовый кружок: вяжешь нитку к двум колышкам и тянешь карандашом. Получится овал.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

фокусы — две заданные точки, от которых считают расстояния

полуоси а и b — a — большая половина оси, b — малая

🎯 Что постоянно у эллипса?

- ✓ Сумма расстояний до двух фокусов, она равна $2a$.

3 Гипербола

Гипербола — две ветки, которые смотрят в разные стороны. Разность расстояний до фокусов всегда одна.

Ветки влево-вправо

- $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
- вершины $(\pm a; 0)$
- $b^2 = c^2 - a^2$

Ветки вверх-вниз

- $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$
- вершины $(0; \pm a)$
- $c^2 = a^2 + b^2$

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

Минус между слагаемыми: ветки уходят влево и вправо, по оси ОХ.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Модуль разности расстояний до фокусов равен $2a$.
- ✓ Эксцентриситет $\varepsilon = c/a$ больше единицы, потому что $c > a$.
- ✓ Асимптоты: $y = \pm(b/a)x$. Ветка всё ближе к ним при $x \rightarrow \infty$.
- ✓ Равнобочная гипербола: $a = b$, асимптоты $y = \pm x$.



КАК В ЖИЗНИ

Как две горки, которые расходятся в стороны: каждая ветка всё ближе к своей прямой-подсказке.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

асимптота — прямая, к которой ветка приближается при $x \rightarrow \infty$

сопряжённая гипербола $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$: ветки смотрят вверх и вниз

🎯 Что постоянно у гиперболы?

- ✓ Модуль разности расстояний до двух фокусов, он равен $2a$.

4 Парабола

Парабола — как мяч, брошенный по дуге. Её форму задают фокус и прямая-директриса.

- 1 Возьми точку F — фокус
- 2 Проведи прямую — директрису
- 3 Точки параболы одинаково далеки от обоих
- 4 Получилось: $y^2 = 2px$

откуда берётся парабола

$$y^2 = 2px$$

Игрек в квадрате равно два пэ икс. Фокус $(p/2; 0)$, директриса $x = -p/2$.

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Фокус $F(p/2; 0)$, директриса $x = -p/2$.
- ✓ $x^2 = 2py$: ветки смотрят вверх, фокус $(0; p/2)$, директриса $y = -p/2$.
- ✓ Пример: фокус $(3; 0)$, значит $p = 6$, и $y^2 = 12x$, директриса $x = -3$.
- ✓ Эксцентриситет параболы равен 1.



КАК В ЖИЗНИ

Как прожектор: свет, вышедший из фокуса и отразившийся от зеркала, идёт ровным пучком.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

директриса — прямая, до которой у точки параболы такое же расстояние, как до фокуса

вершина — самая «острая» точка параболы; у $y^2 = 2px$ это $O(0; 0)$

🎯 Чему равен эксцентриситет параболы?

✓ Единице: $\varepsilon = 1$.

📎 Оригинал в курсе: FlatLinesIIOrder.pdf

📎 Практики по теме: №23 — Кривые второго порядка; №25 — Кривые второго порядка II; №26 — Кривые второго порядка III



1 Плоскость

Поверхность — это все точки, которые подходят под одно правило. Плоскость — самая простая из них.



Точка M_0



Нормаль $n \{A; B; C\}$



Раскрой скобки



Общее уравнение

так строится уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Читается: «А икс плюс бэ игрек плюс цэ зет плюс дэ равно нулю». Буквы А, В, С — координаты нормали n .

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Точка на поверхности, если её координаты подходят к уравнению $F(x, y, z) = 0$.
- ✓ Плоскость — поверхность первого порядка.
- ✓ Сфера — второго порядка: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.



КАК В ЖИЗНИ

Как будто ты стоишь на полу. Пол — это плоскость, а палка, воткнутая прямо вверх, — нормаль.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

поверхность все точки, которые подходят под одно уравнение

нормаль стрелка, перпендикулярная плоскости

🎯 Как называется стрелка, перпендикулярная плоскости?

✅ Нормаль, или нормальный вектор.

2 Расстояние и углы

Хочешь узнать, далеко ли точка от плоскости? Есть готовая формула.

- 1 Возьми точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$
- 2 Подставь её в $Ax + By + Cz + D$
- 3 Возьми модуль — число без минуса
- 4 Раздели на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

как измерить расстояние до стены

$$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

«Дэ» равно модулю выражения, делённому на корень из суммы квадратов А, В, С. Это короткий путь от точки до плоскости.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Расстояние — длина перпендикуляра из точки на плоскость.
- ✓ Параллельны: $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$.
- ✓ Перпендикулярны: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.
- ✓ Угол между плоскостями — угол между их нормальями.



КАК В ЖИЗНИ

Как будто ты стоишь у стены и тянешь до неё самый короткий путь — прямо, без наклона.



СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

модуль число без минуса: $|-3| = 3$

перпендикуляр самая короткая линия из точки до плоскости

🎯 Когда две плоскости перпендикулярны?

- ✓ Когда $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

3 Прямая в пространстве

Прямая в пространстве — как бесконечная палка. Чтобы её записать, нужны точка и направление.



Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$



Направление $S \{m; n; p\}$



Приравняй к t



Параметры x, y, z

так записывается прямая

$$(x - x_0)/m = (y - y_0)/n = (z - z_0)/p = t$$

Читается: «икс минус икс нулевое, делить на эм» — и так же для игрека и зета. Вектор $S \{m; n; p\}$ задаёт направление.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Параметрические: $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$.
- ✓ Через две точки M_1, M_2 направляющий вектор — это M_1M_2 .
- ✓ Прямая — пересечение двух плоскостей, записанное системой.



КАК В ЖИЗНИ

Как будто ты идёшь по дорожке. S — куда ты смотришь, а t — сколько шагов ты сделал.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

направляющий вектор — стрелка, параллельная прямой

параметр t — число, которое «шагает» по прямой

🎯 Что задаёт направление прямой?

- ✓ Направляющий вектор $S \{m; n; p\}$.

4 Прямая и плоскость

Прямая и плоскость могут стать параллельными, перпендикулярными или пересечься. Проверь формулой.

Прямая и плоскость

- Параллельны: $Am + Bn + Cp = 0$
- Перпендикулярны: $A/m = B/n = C/p$
- Пересекаются: $Am + Bn + Cp \neq 0$

Две прямые

- Параллельны: $S_1 \parallel S_2$
- Пересекаются: $(M_1 M_2, S_1, S_2) = 0$
- Скрещиваются: смешанное произведение $\neq 0$

$$\sin \varphi = |Am + Bn + Cp| / (\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2})$$

φ — угол между прямой $S \{m; n; p\}$ и плоскостью с нормалью $\{A; B; C\}$.

ЗАПОМНИ

- ✓ Точка пересечения: подставь параметрические x, y, z в плоскость.
- ✓ Расстояние от точки до прямой: $|M_0 M_1 \times S| / |S|$.
- ✓ Скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости.



КАК В ЖИЗНИ

Как будто палка лежит на столе или торчит вверх. Угол — насколько она наклонена к столу.

СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

угол между прямой и плоскостью — угол между прямой и её тенью на плоскости

скрещивающиеся прямые — прямые, которые не лежат в одной плоскости

🎯 Когда прямая параллельна плоскости?

- ✓ Когда $Am + Bn + Cp = 0$.

5 Расстояние между прямыми

Как далеко друг от друга две прямые в пространстве? Всё зависит от того, смотрят ли они в одну сторону.

Параллельные (векторы S_1 и S_2 коллинеарны)

- Берём точку на одной прямой
- Считаем её расстояние до другой прямой

Скрещивающиеся (S_1 и S_2 не коллинеарны)

- Строим параллелепипед на векторах M_1M_2 , S_1 , S_2
- Расстояние — его высота

$$d = |(M_1M_2, S_1, S_2)| / |S_1 \times S_2|$$

Скрещивающиеся прямые: объём параллелепипеда (смешанное произведение) делим на площадь основания (длина векторного произведения).

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Параллельные или совпадающие прямые: $d = |M_2M_1 \times S_2| / |S_2|$, как расстояние от точки до прямой.
- ✓ Если прямые пересекаются, расстояние равно нулю.
- ✓ Расстояние от точки M_1 до прямой с точкой M_0 и направляющим вектором S : $d = |M_0M_1 \times S| / |S|$. Для $M_1(9; 6; 5)$ и $(x-3)/2 = (y-2)/2 = (z-4)/1$ получается $d = 2$.



КАК В ЖИЗНИ

Рельсы и мост над ними: рельсы и мост не пересекаются и не параллельны. Расстояние между ними — самый короткий мостик, который можно перекинуть от одних к другим.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

скрещивающиеся прямые не параллельны и не пересекаются

общий перпендикуляр самый короткий отрезок между скрещивающимися прямыми

направляющий вектор вектор S , параллельный прямой

🎯 Чему равно расстояние между пересекающимися прямыми?

✔ Нулю.

📎 Оригинал в курсе: 3DimensionGeometry.pdf

✍ Практики по теме: №24 — Трёхмерная геометрия



1 Эллипсоид и сфера

Мяч и «вытянутый мяч» — это поверхности второго порядка. Их уравнение второй степени.



Сфера: R



Эллипсоид: a, b, c

два знакомых мяча

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

Читается: «икс квадрат на а квадрат, плюс игрек квадрат на бэ квадрат, плюс зет квадрат на цэ квадрат, равно единице». Буквы a, b, c — полуоси.

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Поверхность второго порядка — уравнение второй степени относительно x, y, z .
- ✓ Сфера: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, центр $(a; b; c)$.
- ✓ Эллипсоид ограничен: он внутри коробки размером $2a \times 2b \times 2c$.



КАК В ЖИЗНИ

Сфера — идеальный мяч. Эллипсоид — мяч, немного вытянутый или сплюснутый, как регбийный.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

полуоси — половины длин осей: a, b, c

эллипсоид — мяч, немного вытянутый или сплюснутый

🎯 Каким будет эллипсоид, если $a = b = c$?

- ✓ Сферой, то есть мячом.

2 Гиперболоиды

Гиперболоиды бывают двух видов: один «кусок», как башенка, или две части, как две чашки.

Однополостный

- $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$
- Один кусок, бесконечный
- Сечения $z = h$ — эллипсы
- Самый узкий в середине

Двуполостный

- $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$
- Две части: сверху и снизу
- Точек нет при $|z| < c$
- Сечения при $|z| > c$ — эллипсы

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$$

Читается: «икс квадрат на а квадрат, плюс игрек квадрат на бэ квадрат, минус зет квадрат на цэ квадрат, равно единице». Это однополостный гиперболоид.

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Горловой эллипс — самое узкое сечение, при $z = 0$.
- ✓ У двуполостного справа -1 : он не пересекает плоскость $z = 0$.
- ✓ Оба гиперболоида симметричны относительно начала координат.



КАК В ЖИЗНИ

Однополостный — бумажная башенка, сжатая посередине. Двуполостный — две чашки, стоящие донышками врозь.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

гиперболоид — поверхность, в сечениях которой получаются гиперболы

горловой эллипс — самое узкое сечение однополостного гиперболоида

🎯 Какая правая часть у двуполостного гиперболоида?

- ✓ -1 , а у однополостного 1 .

3 Параболоиды и конус

Параболоид — это чаша, а конус — две воронки, сложенные вершинами.



Эллиптический
параболоид



Гиперболический
(седло)



Конус

три знакомые формы

$$z = x^2/a^2 + y^2/b^2$$

Эллиптический параболоид — чаша, открытая вверх. Читается: «зет равно икс квадрат на а квадрат, плюс игрек квадрат на бэ квадрат».

☰ ЗАПОМНИ

- ✓ Гиперболический параболоид: $z = x^2/a^2 - y^2/b^2$ — это седло.
- ✓ Конус: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$, вершина в начале координат.
- ✓ Сечения конуса при $z = h$ — эллипсы, при $h = 0$ — точка.



КАК В ЖИЗНИ

Чаша для супа — круглая сверху и узкая внизу. Седло — вверх в одну сторону, вниз в другую.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

параболоид — поверхность в форме чаши или седла

конус второго порядка — две воронки, соединённые вершинами

🎯 Что получится в сечении $z = 0$ у гиперболического параболоида?

✓ Две пересекающиеся прямые: $y = \pm(b/a) \cdot x$.

4 Цилиндры и вращение

Цилиндр — как банка без крышки: одна буква в уравнении не участвует. Вращение — как гончарный круг.



Кривая в плоскости
 yOz



Вращаем вокруг Oy



Меняем z на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$



Уравнение
поверхности

так получают поверхность вращения

$$z \rightarrow \pm\sqrt{x^2 + z^2}$$

Вращаем кривую вокруг оси Oy : вместо z ставим $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$. Знак выбирай тот же, что у z на исходной кривой.

≡ ЗАПОМНИ

- ✓ Цилиндр: в уравнении нет одной буквы, например z : $F(x, y) = 0$.
- ✓ Парабола $z^2 = 2px$, вращая вокруг Ox , даёт $y^2 + z^2 = 2px$.
- ✓ Тор — не поверхность второго порядка.



КАК В ЖИЗНИ

Как будто ты крутишь горшок на гончарном круге: одна кривая, круг, и получилось тело.

🎓 СЛОВА ДЛЯ ВЗРОСЛЫХ

направляющая кривая, по которой ведём прямую цилиндра

поверхность вращения кривая, которая крутится вокруг оси

🎯 Как называется кривая, по которой движется прямая цилиндра?

✓ Направляющая.

📎 Оригинал в курсе: [SecondOrderSurfaces.pdf](#)

📎 Практики по теме: №27 — Поверхности второго порядка